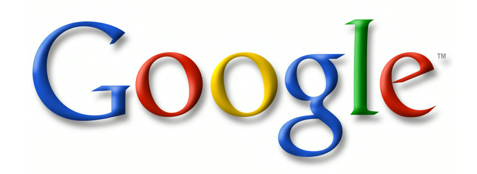


GRUNDLEGUNG

DER

THEORIE

DES

VARIATIONS-CALCULS.

VON

Dr. ALOYS MAYR, 1807-1890

ORDENTL. PROFESSOR DER MATHEMATIK UND ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT
ZU WÜRZBURG.

WÜRZBURG.

JULIUS KELLNER'S BUCHHANDLUNG

1861.



Alexander Ziwet

314

GRUNDLEGUNG

DER

THEORIE

DES

VARIATIONS-CALCULS.

VON

Dr. ALOYS MAYR, 1807-1890

ORDENTL. PROFESSOR DER MATHEMATIK UND ASTRONOMIE AN DER UNIVERSITÄT ZU WÜRZBURG.

WÜRZBURG.

JULIUS KELLNER'S BUCHHANDLUNG.

1861.

Cum eo eram cuncta componens: et delectabar per singulos dies, ludens coram eo omni tempore, ludens in orbe terrarum.

DRUCK VON F. E. THEIN IN WÜRZBURG.

Vorwort.

In den nachfolgenden Blättern gebe ich eine Grundlegung der Variations-Theorie, die sich von der bisherigen Behandlungsweise dieser Wissenschaft nicht bloss dem Grade, sondern auch der Art nach unterscheidet. Denn in ihr ist der Beweis geführt, dass Alles, was man für eigenthümliche Variations-Operation ausgiebt, nichts Anderes ist, als totales oder partielles Differenzial. Wird dadurch einerseits die Methode einfacher, leichter und natürlicher, so wird auch andererseits das Verständniss der Wahrheit eröffnet, und die dem Variations-Calcul gebührende, aber im Systeme der Wissenschaft so lange Zeit hindurch schwankend gebliebene Stellung nachgewiesen und befestigt.

Die Methode, die ich bei Behandlung dieser schwierigen Probleme gewählt habe, ist die kritisch untersuchende: sie beginnt unscheinbar, wie die im Hochland entspringende Quelle; durch Zuflüsse genährt und in stetem Wachsthum begriffen, wird sie endlich ein befruchtender Strom, reichlich im Stande, das anfangs Fernliegende, scheinbar Unfassbare, zu erfassen und zu begreifen. Diese Methode habe ich absichtlich gewählt, damit Allen, die mit der Wissenschaft auch nur einigermassen vertraut sind, der Zugang zu diesen sonst so abstrusen Untersuchungen erleichtert und geebnet werde.

Variation beschäftigt sich mit Untersuchung über Maximum und Minimum. Das allgemeine Criterium ist, dass für sie das erste Differenzial der gegebenen Function gleich Null wird. Ich weiss wohl, dass ausserdem noch

das erste Differenzial gleich Unendlich gesetzt und experimentirt werden kann, ebenso, dass wenn für die gefundenen Werthe auch das zweite Differenzial gleich Null wird, die dritten und folgenden Differenzialien untersucht werden, wie diess die Idee der exacten Theorie verlangt. Der Idee nach kann diess auch leicht festgehalten werden, um so mehr, als die daraus folgenden Operationen die nämlichen bleiben, wie bei der gewöhnlichen Behandlungsweise des ersten Differenzials. In gegenwärtiger Schrift habe ich aber jederzeit das erste Differenzial bloss gleich Null gesetzt und demgemäss die Untersuchung fortgeführt, theils um ermüdende Weitläufigkeit zu vermeiden, theils auch, weil die wirklichen Variations-Probleme dieser Untersuchung schon durch das einzige Criterium, welches das erste Differenzial gleich Null setzt, vollständig gelöst werden.

Die bei der Untersuchung gebrauchten Zeichen erklären sich wohl von selbst. Für die totalen Differenzialien sind, wie es gewöhnlich ist, die stehenden d, d^2 etc., für die partiellen die geschwungenen ∂, ∂^2 etc. gebraucht, so dass z. B. $\frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ den Ausdruck bedeutet, der gefunden wird, wenn z als Function beliebiger Veränderlicher (x, y, v, w ..) bloss so differenzirt wird, als ob y allein veränderlich wäre. Entsprechendes gilt von $\frac{\partial z}{\partial x}\,dx$, $\frac{\partial z}{\partial v}\,dv$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v}\,dx\,dv$ etc. Diese Bezeichnungsart ist auch schon von Andern vielfach gebraucht worden.

Alle übrigen Punkte, die etwa noch zu erörtern sein möchten, sind in der Untersuchung selbst hinlänglich besprochen und erledigt worden.

Würzburg, 6. Januar 1861.

I.

Ueber Wesen und Inhalt des Variations-Calculs.

---

§ 1.

Die Grundlegung der Theorie der Variations-Rechnung beginne ich mit der Aufzählung ihrer Probleme und der zur Lösung derselben unternommenen Versuche, da auch hier wie anderwärts aus der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft am leichtesten eingesehen wird, was sie will, und mit welchen Mitteln sie die ihr gegenüber stehenden Schwierigkeiten überwindet. Dieser Prozess, in welchem sich der Variations-Calcul allmälig zur selbständigen Wissenschaft ausgebildet hat, ist zwar schon öfter, namentlich seit Lagrange, dargestellt worden; doch dürfte eine wiederholte Behandlung desselben Gegenstandes nicht überflüssig sein, da die Aussprüche über Inhalt, Begriff und Wesen des Variations-Calculs bei einigen Schriftstellern dunkel und unbestimmt, bei andern aber geradezu widersprechend sind, so dass die Thatsachen selber vorliegen müssen, wenn das Urtheil unbefangen und frei bleiben soll.

§ 2.

Der Variations-Calcul beschäftigt sich, wie bekannt, mit Auffindung von Functionen, die als solche, d. h. für alle Werthe der in ihnen enthaltenen Veränderlichen irgend eine gegebene

Function zu einem Maximum oder Minimum machen, während die im Differenzial-Calcul vorkommende Theorie des Maximums oder Minimums die einzelnen Werthe einer Function herausstellt, welche diese zu einem Maximum Minimum machen.

Das Problem über Maximum Minimum ist also beiden Wissenschaften, dem Differenzial- und dem Variations-Calcul, gemeinschaftlich; was sie beide unterscheidet, das verhält sich so, wie sich in der Algebra bestimmte und unbestimmte Gleichungen zu einander verhalten. Wenn die ersteren für die unbekannten Grössen je nach dem Grade der Gleichungen einen oder mehrere bestimmte Werthe liefern, so geben die unbestimmten Gleichungen unendlich viele und continuirliche Werthe der Unbekannten, oder vielmehr eine Endgleichung von wenigstens zwei veränderlichen Grössen, d. h. eine Function abhängiger Grössen, die sich mit einander ändern, so dass nicht mehr ein einzelner bestimmter Werth, sondern ein System unendlich vieler Werthe der Veränderlichen als Resultat auftritt. Diess findet nun auch bei den Problemen des Variations-Calculs statt, während die Maxima Minima Probleme des Differenzial-Calculs nur einzelne bestimmte Werthe der Veränderlichen geben, gerade wie die bestimmten Gleichungen der Algebra.

§ 3.

Nun war schon durch Fermat die gewöhnliche Lehre vom Grössten Kleinsten in eine allgemeine Methode gebracht, auch war schon von Leibniz der sichere Algorithmus des Differenzirens für die Behandlung dieser Lehre geschaffen, als Newton im Jahre 1687 ein neues Problem aufstellte, nämlich „die Curve zu finden, die durch die Umdrehung um ihre Axe einen Körper beschreibt, der, wenn er sich in einem flüssigen Mittel nach der Richtung seiner Axe bewegt, den kleinsten Widerstand findet.“ Diess ist von der gewöhnlichen Lehre des Maximums Minimums verschieden; denn es handelt sich nicht um einen oder mehrere ausgezeichnete Punkte einer gegebenen Curve, sondern um eine erst zu findende Curve selber, und in dieser nicht um einen

oder mehrere Punkte, sondern um alle Punkte in ihr. Denn das Minimum des Widerstandes soll für den ganzen Rotationskörper gelten, dessen Oberfläche nicht durch einen oder mehrere, sondern durch alle Punkte der verlangten Curve bestimmt wird. — Newton löste auch dieses Problem, verschwieg jedoch die Methode, die er dabei anwandte, und die offenbar von der gewöhnlichen Differenzial-Methode verschieden war.

Bald darauf gab Joh. Bernoulli seine berühmte Aufgabe über die Brachystochrone, d. h. die Linie des schnellsten Falles, und forderte 1696 die Mathematiker auf, auch ihrerseits die Lösung dieses Problems zu versuchen, was denn auch von Leibniz, Newton, Jak. Bernoulli und Andern geschah.

Man fand die Cycloide als die Linie, die dem schnellsten Falle entspricht, aber durch ein Verfahren, das sich wie der damalige Differenzial-Calcul am Anfange auf unendlich kleine Grössen gründete, dann auf fremdartige, vom Differenzial-Calcul abweichende Reflexionen überging und endlich das Resultat wieder in den gewöhnlichen Differenzial-Operationen gab.

Hierauf schritt man zu verwickelteren Aufgaben, zu den sogenannten isoperimetrischen Problemen, die darin bestehen, Curven zu finden, die unter allen Curven von gleicher Länge irgend eine verlangte Function zu einem Maximum Minimum machen, Untersuchungen, an denen sich die beiden Bernoulli, Taylor und Euler betheiligten.

Jak. Bernoulli gab zuerst ein solches Problem, und schon glaubte sein jüngerer Bruder Joh. Bernoulli, es gelöst zu haben, als es sich zeigte, dass die gegebene Lösung irrig war. Jak. Bernoulli bewies in seiner Schrift: *Analysis magni problematis isoperimetrici*, dass man bei solchen Aufgaben, statt wie im Differenzial-Calcul zwei, nothwendig drei aufeinanderfolgende Seiten der Curven in Betracht ziehen müsse, da ohne diese Correctur die Resultate unsicher werden. Selbst Euler irrte sich später in der Behandlung des Problems der Brachystochrone im widerstrebenden Mittel, ein Problem, dessen richtige Lösung er

erst in seinem 1744 erschienenen Werke: *Methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimive proprietate gaudentes*" zu geben im Stande war.

§ 4.

Dass Probleme, bei deren Behandlung zwei so hervorragende Mathematiker, wie Joh. Bernoulli und Euler, irren konnten, eigenthümliche und grosse Schwierigkeiten haben müssen, ist einleuchtend. Die Auflösungen, die zuletzt Euler in seinem erwähnten Werke giebt, beruhen mehr auf individuellem Räsonnement, als auf gleichförmigem Calcul, und die Verfahrungsweise ist so eigenthümlich, dass es unmöglich wird, von ihr eine kurze Analyse zu geben, daher diess bei Euler selbst nachgelesen werden muss.

Dessenungeachtet bleibt Eulers Werk ewig denkwürdig, ja unsterblich — die reichste und ausgebeutetste Fundgrube der schönsten Anwendungen, der Abschluss aller Theorien, die von Leibniz und Newton an bis auf Euler versucht und aufgestellt worden waren, und endlich die Schatzkammer wohlgeordneter, in allgemeinen und unwidersprechlich sicheren Differenzial-Operationen gegebener Resultate. — Eine pag. 56 dieses Werkes eingestreute Bemerkung: „*desideratur itaque methodus, a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimive loco Pdp scribi deberi — $p\,dP$*", gab Veranlassung, dass Lagrange eine von jeder geometrischen Betrachtung unabhängige, auf allgemeinen Algorithmus gegründete Theorie der Variations-Rechnung gab, die aber damals noch nicht so genannt wurde, da erst später Euler diese Benennung einführte und gebrauchte.

Findet man nämlich, um die Euler'sche Bezeichnung beizubehalten, bei Differenzirung des Ausdrucks $\int V dx$, worin V eine Function von $x, y, p, q, r \ldots$ ist: ($p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$) $d\int V dx = \int (Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \ldots) dx$ (worin $M, N, P, Q \ldots$ die Coëfficienten von $dx, dy, dp, dq \ldots$

bezeichnen), so giebt die auf gewöhnliche Differenzial-Operationen gebrachte Gleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$$

die verlangte Curve. Diese Formel hatte Euler aufgestellt; aber er vermisste noch den allgemeinen analytischen Beweis dafür, den nun Lagrange lieferte, aber dabei eigenthümliche Variations-Operationen mit dem Zeichen δ anwandte.

§ 5.

Euler, der diesen Beweis im Jahre 1755 von Lagrange erhielt, ward dadurch auf's Höchste überrascht, und spendete dem jugendlichen Mathematiker das unbedingte Lob, dass seine Auflösung des Problems nichts mehr zu wünschen übrig lasse.

Allein die Begründung der Lagrange'schen Theorie hatte ihre bedeutenden Mängel, und wahrscheinlich war es das Lob, das Euler zu frühzeitig gespendet, das ihn selber nicht ruhen liess. Im Jahre 1764 erschienen von ihm zwei ausführliche Abhandlungen über den Variations-Calcul (in denen er diesen Namen zuerst gebrauchte), die er später 1770 erweiterte und dem dritten Theile seiner Integral-Rechnung einverleibte. Damit nicht zufrieden, gab er 1771 eine neue Abhandlung heraus, und brachte durch Einführung neuer Veränderlicher das Verfahren in eine mehr naturgemässe, in blossen Differenzial-Operationen bestehende Methode.

Auch Lagrange liess es seinerseits nicht bei seinem ersten jugendlichen Versuche beruhen, sondern bildete seine Entdeckung weiter aus, und gab endlich, ein halbes Jahrhundert später, in der 21. und 22. Vorlesung seiner Functionen-Theorie das ganze Lehrgebäude der Variations-Rechnung in meisterhafter Kürze und Bündigkeit, ohne jedoch alle vorhandenen Schwierigkeiten heben zu können.

Was seit dieser Zeit geleistet worden ist, übergehe ich, da es nicht die Grundlegung und das Wachsthum, sondern den mehr gerundeten Ausbau der Wissenschaft betrifft. Dabei ist

zu bemerken, dass der Gegenstand unter der Hand um so eckiger wurde, je mehr man ihn abrunden wollte, und dass öfter, wenn schon Alles geglättet und vollendet schien, bei neuem Eingehen ganz unerwartete Unebenheiten zu Tage kamen, wie die Untersuchungen von Jacobi, Poisson, Dirksen, Ohm, Strauch und Andern zeigen.

Diese Unebenheiten und Risse wachsen immer mehr und mehr und scheinen sich zu wahren Klüften erweitern zu wollen, wie Jeder weiss, der sich mit dem Gegenstande vertraut gemacht hat. Es ist fast überflüssig, das folgende Bekenntniss von Strauch (I, 164) anzuführen: „Es ist ersichtlich; dass jene Mathematiker ihre Irrthümer begingen, weil sie über das, was sie unternahmen, nicht mit sich selbst klar waren, weil sie ohne alle Umsicht, Uebersicht und Erfahrung zu Werke gingen ... Der Ausdruck, den sie für den esten Mutations-Coëfficienten bekommen (der Verfasser setzt Mutation statt Variation, ändert aber sonst nichts Wesentliches im Variations-Calcul), ist durch die Zufälligkeit des Calculs jedesmal richtig, während der Ausdruck der Mutations-Coëfficienten der zweiten Ordnung, wenn sie ihn festgestellt hätten, in den meisten Fällen falsch sein würde.“ Diess und Stärkeres ist im Werke selbst, dem ausführlichsten, das über Variations-Calcul erschienen ist, nachzulesen.

Und in der That, wer nicht den eigenen Ruhm, nicht die hartnäckige Behauptung der Ehre der Wissenschaft, wo sie nicht ist, im Auge hat, sondern die ehrwürdige, schlichte und natürliche Wahrheit selber sucht, wird sich gestehen müssen, dass der gegenwärtige Zustand der Variations-Rechung der sonst so vollkommenen mathematischen Wissenschaft nicht zur Ehre gereicht.

§ 6.

Betrachten wir die Variations-Rechnung, wie sie gegenwärtig ist, so begegnen uns einige hervorragende und noch ungelöste Schwierigkeiten:

a) Man lehrt, dass Variiren und Differenziren verschieden sind, und gebraucht δ als Symbol des Variirens, während d und ∂,

wie bekannt, als Symbole der Differenzial-Operationen angewendet werden. Aber ungeachtet aller vorausgeschickten Erklärungen und ungeachtet der verschiedenen Zeichen sind doch die Variations-Operationen in aller und jeder Hinsicht identisch mit den Differenzial-Operationen, ja es ist kein Fall denkbar, in dem sie von ihnen verschieden sein könnten. Worin liegt es nun, dass man dessenungeachtet die dem Calcul fremdartigen Reflexionen und Zeichen nicht entbehren kann?

b) In dem Variations-Ausdrucke $\int V dx$, worin V eine Function von x, y und ihren Differenzialien ausdrückt, sind x und y von einander abhängig. Um aber zu dem im Variations-Calcul gewünschten Resultate gelangen zu können, muss man x und y von einander unabhängig nehmen. Diess kann man sich gegen ein Zeichen erlauben, aber an der Natur der Sache gleitet jede solche Gewaltthätigkeit ab, da durch blosse Namen-Erklärungen weder abhängige Grössen unabhängig, noch unabhängige von einander abhängig gemacht werden können. Im Variations-Calcul aber muss man diess thun, sonst erreicht man das Resultat nicht. Worin liegt diess, und wodurch wird es vermittelt?

c) Man setzt den Ausdruck $\delta\int V dx$ gleich Null, und muss es thun, um die Endgleichung einigermassen rechtfertigen zu können. Und doch ist dieser Ausdruck nicht gleich Null; ja wenn man die Gleichung der gesuchten Grösse leichter aus $V dx$ als aus der Endgleichung $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$ herstellen kann, setzt man unbedenklich $\delta\int V dx$ einer Grösse gleich, die nicht gleich Null ist. Wie sind solche Widersprüche auszugleichen?

d) Bei der Untersuchung über die Grenzwerthe (Grenz-Curven) kömmt man auf einen oder zwei Werthe, die sehr merkwürdige Eigenschaften haben. Da jedoch die Grenzwerthe willkürlich sind, weil sich die Variationen allgemein auf alle Werthe erstrecken müssen, so hat man im Problem unendlich viele Grenzwerthe, die nach einem bestimmten System der Abhängigkeit continuirlich aufeinander folgen. Woher kömmt es, dass man nicht im Stande ist, diess Problem anzugreifen?

e) Wenn bei den Aufgaben der Differenzial-Rechnung die Criterien der Unterscheidung des Maximums vom Minimum im Ganzen höchst einfach, exact und jederzeit sicher sind, so dass kein Irrthum in ihnen möglich wird, so sind die in der Variations-Rechnung für diesen Fall aufgestellten Criterien das gerade Gegentheil; sie sind sämmtlich unzuverlässig, wie sich denn auch verschiedene Autoren bei einem und demselben Resultate widersprechen. Kein System der bisher zu diesem Zwecke aufgestellten Criterien, auch nicht das eben so weitläufige als abstruse von Jacobi, ist im Stande, auch nur eine halbe Sicherheit zu gewähren. Woran liegt diess?

Wer diese Fragen erwägt, der hat Veranlassung und Anhaltspunkte genug, sein Urtheil über den gegenwärtigen Zustand der Variations-Rechnung festzustellen.

Und doch umfasst diese Wissenschaft den vornehmsten, höchsten und ausgezeichnetsten Theil der gesammten Mathematik. Denn sie ist es, die über die tiefsten Geheimnisse der Naturforschung entscheidet, da in der Natur immer ein Minimum der Kraft bei gleichem Erfolg, oder ein Maximum des Erfolgs bei gleicher Kraft stattfindet, weil die Natur mit Schonung der Kräfte wirkt und vorgeht.

Mit Recht sagt Euler: *Cum mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non Maximi Minimive ratio quaepiam eluceat; quam ob rem dubium prorsus est nullum, quin omnes mundi effectus ex causis finalibus ope methodi Maximorum et Minimorum aeque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus.*

Man kann daher sagen, dass im Variations-Calcul die Kraft zur Erschliessung der Natur liegt, und dass alle Theile der Analysis, der Geometrie und Mechanik in ihr, als ihrer aller Krone, wipfeln, und in ihr erst ihre wahre Bedeutung finden. Eine solche Wissenschaft, wie die Variations-Rechnung, ist es werth, dass sie mit aller Liebe und Anstrengung gefördert wird.

§ 7.

Finden sich nun unlösbare Widersprüche, dann ist die Reflexion erlaubt, dass man vielleicht vom Anfange an und in der Gesammtrichtung irre gegangen ist, und dass man daher vom Anfange an die wahre Richtung aufsuchen und gewinnen müsse; und dass alle Verbesserungen und Verfeinerungen, die in der ursprünglich fehlerhaften Richtung angebracht werden, nur unhaltbare Resultate liefern können, die, je eifriger sie betrieben werden, um so mehr Blössen und Widersprüche zu Tage fördern.

Denken wir uns die objective Wahrheit eines Gegenstandes in einer Linie entwickelt, und ebenso die menschliche Theorie der Erkenntniss dieses Gegenstandes in einer anderen Linie, so können beide Linien zusammen fallen und sich decken; dann wird der Gegenstand erkannt, wie er ist, und die menschliche Erkenntniss ist eine wahre und vollkommene Erkenntniss. Es ist aber auch denkbar, dass sich die beiden Linien nicht decken, sondern unter einem grösseren oder kleineren Winkel durchschneiden; dann bleibt der Gegenstand unerkannt, und die menschliche Erkenntniss ist irrig und unvollkommen, um so unvollkommener, je grösser der Winkel ist, unter dem Wahrheit und Erkenntniss auseinandergehen. Und doch können sie den Durchschnittspunkt gemeinschaftlich haben, so dass in ihm, aber nur in ihm allein der Anfang der wahren Erkenntniss liegt. Daraus wird denkbar, dass sich Wahrheit und Erkenntniss um so weiter entfernen, je weiter die Theorie in ihrer Ausbildung fortschreitet, ja dass sie durch das seitlich einfallende Licht der Wahrheit geblendet mit unglaublichem Eifer, mit Anwendung aller geistigen Hilfsmittel der begabtesten Forscher auf ihrem Wege fortschreitet, und statt der Wahrheit näher zu kommen, immer weiter von ihr wegrückt, und darum auch nur stets und stets schwächeres Licht von ihr erhält.

Und sollte diess die wahre Sachlage sein, dann ist auch die Erwägung erlaubt, ob nicht die bisherige Richtung verlassen und eine ganz neue eingeschlagen werden müsse, da jedenfalls die Wahrheit ganz anderswo, als auf dem Wege der bisherigen Theorien gesucht werden muss.

§ 8.

Zuerst und vor Allem ist dann darauf zu sehen, dass der Ausgangspunkt richtig gefasst und unerschütterlich befestigt wird. Dieser kann bei der Variations-Rechnung in keiner Weise zweifelhaft sein, da sie im Differenzial-Calcul, und zwar in der Lehre vom Grössten und Kleinsten wurzelt, wo also auch ihr Ausgangspunkt zu treffen sein muss.

Dort, in der Lehre des Differenzial-Calculs vom Grössten und Kleinsten, muss ohne Zweifel irgend etwas übersehen, irgend eine Lücke unbeachtet gelassen worden sein, eine Unterlassung, die sich denn auch in den unsystematisch auftauchenden Variations-Problemen ankündigt, aber nicht ergänzt. Aehnliches hat sich auch schon in anderen Wissenschaften zugetragen, und kömmt täglich in den Erfahrungswissenschaften vor; die instinctartig auftauchenden Probleme können nicht gehörig gelöst werden; Streben ist wohl da, aber zum Vollbringen fehlt das Licht der systematischen Entwicklung.

§ 9.

Bei der Musterung der Theorie des Maximums und Minimums im Differenzial-Calcul begegnen uns der Reihe nach die Functionen einer, zweier und mehrerer von einander abhängiger oder unabhängiger Variabeln.

Beginnen wir mit der Function einer Veränderlichen $z = fx$, in der z nur von x abhängig ist, so giebt $dz = 0$ die Werthe von x, welche z zu einem Maximum Minimum machen, je nachdem d^2z für die gefundenen Werthe von x negativ oder positiv wird. — Bei diesen Functionen ist schlechterdings keine Lücke zu entdecken, der Gegenstand ist in sich abgerundet und abgeschlossen.

Gehen wir zur nächsten Function $z = f(x, y)$, in der x und y von einander unabhängig sind, da ihre Abhängigkeit durch keine Bedingungs-Gleichung gegeben ist, so treten Maxima und Minima ein, wenn $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ einzeln gleich Null sind. Diese beiden Gleichungen $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ bestimmen die beiden Un-

bekannten x und y, für welche z ein Maximum Minimum wird. Ersteres tritt ein, wenn für die gefundenen Werthe: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$; das Minimum aber tritt ein, wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = +$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = +$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$. Diese Criterien sind exact und vollkommen sicher; es ist nichts beizusetzen und es scheint nichts unterlassen zu sein.

Und dennoch, däucht mir, finden sich schon in diesem so einfachen Falle der Functionen zweier unabhängig Veränderlicher einige Punkte, die unerörtert geblieben sind, Lücken, die doch wenigstens zur Sprache gebracht zu werden verdienen.

Z. B. die Frage, was denn wohl hervorgehen möge, wenn statt beider partieller Differenzialien $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ nur eines gleich Null wird, während das andere einen beliebigen Werth behält? So viel ist klar, dass ein solcher Fall nicht ein absolutes Maximum Minimum für einen Punkt giebt, ja dass er nicht einmal irgend einen einzelnen Punkt bestimmt, da nur eine Gleichung für die beiden Unbekannten x und y gegeben ist, woraus nicht ein Punkt, sondern eine Curve folgt. Und doch muss eine Eigenschaft der gegebenen Function dadurch ausgedrückt sein, und vielleicht eine Maximum-Minimum-Eigenschaft, aber in anderem Sinne, da statt der zwei Gleichungen $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ nur eine, entweder $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ oder $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ gegeben ist.

Aehnliche und viel grössere Lücken finden sich bei der Untersuchung der Functionen dreier oder mehrerer unabhängig Veränderlicher, in denen eine, zwei oder mehrere Gleichungen weniger gegeben sein können, als Variable vorhanden sind.

Warum diese Lücken in der Differenzial-Behandlung der Maxima-Minima-Probleme unausgefüllt geblieben sind, dafür ist in der Geschichte der Wissenschaft kein Grund zu finden; aber es ist einleuchtend, dass diese Lücken untersucht werden müssen, wenn

der Differenzial-Calcul auf Vollständigkeit Anspruch machen will. Denn selbst den ungünstigsten Fall angenommen, dass diese Untersuchungen keine brauchbaren Resultate liefern, so erkennt man diess doch erst nach angestellter Untersuchung, und auch diese Erkenntniss ist Gewinn für die Wissenschaft.

Nehmen wir die Gleichung einer Kugelfläche, und die Ordinate z als Function der beiden unabhängigen Ordinaten x und y, $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, so geht für diese Gleichung die Ordinaten-Ebene durch den Mittelpunkt der Kugelfläche, und dieser Punkt ist der Anfangspunkt der Ordinaten x, y, z. Es ist einleuchtend, dass die Ordinaten z in der Peripherie d. h. im Durchschnitte der Ebene XY mit der Kugelfläche, gleich Null sind, dass sie dann von allen Seiten gegen die Mitte der Kugelfläche grösser werden, und endlich in der Mitte für $z = r$ ein Maximum erreichen. Diess zeigt auch der Calcul; denn $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{z} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z} = 0$ geben $x = 0$, $y = 0$, d. h. die Mitte der Kugelfläche.

Die Criterien des zweiten Differenzials geben dann $\mp$, je nachdem $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ genommen wird, also ein Maximum oder Minimum, je nachdem man die Kugelfläche über oder unter der Ebene XY betrachtet.

Was entsteht aber, wenn bloss einseitig etwa $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ genommen wird? Da $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{z}$ ist, so wird $x = 0$. Diess ist die Gleichung einer Geraden, die mit der Axe Y zusammenfällt, oder die Gleichung der senkrechten Ebene YZ. Diese durchschneidet die Kugelfläche in einem grössten Kreise, dessen Gleichung, da $x = 0$ ist, $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ wird. Dieser grösste Kreis hat die Eigenschaft, dass seine Ordinaten z durchweg, von $y = +r$, bis $y = -r$, g r ö s s e r sind als alle rechts und links liegenden Ordinaten der auf ihm senkrecht stehenden Parallelkreise, die zwar demselben Werthe y, aber nicht mehr dem Werthe $x = 0$, sondern $x = \pm$ entsprechen.

Die gefundene Curve $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ hat also die Eigenschaft, dass jeder Punkt der Kugeloberfläche, der in ihr liegt,

zwar nach einer Richtung, parallel mit der Axe X Maxima der Ordinaten z hat, nicht aber auch nach der anderen Richtung, (nach der Axe Y,) denn in dieser Richtung wachsen die Ordinaten z continuirlich von $y = -r$ bis $y = 0$, wo sie ein absolutes Maximum erreichen, und nehmen dann ab bis $y = +r$.

Mit anderen Worten: Die gefundene Curve ist der geometrische Ort aller absoluten Maxima der Ordinaten z, Maxima, die jedoch nicht für die gefundene Curve, sondern für die auf ihr senkrecht stehenden Parallelkreise eintreten.

Dieses Resultat gleicht sehr den im Variations-Calcul gefundenen Resultaten.

§ 10.

Wählen wir ein anderes bekanntes Beispiel. Der Meridian eines Ortes durchschneidet Aequator und Parallelkreise so, dass alle Gestirne, in welchem Parallel sie auch sein mögen, in ihm ihren höchsten Stand über dem Horizonte erreichen. Stellen wir die Frage: welche Curve (Function) hat die Eigenschaft, dass sie die Höhe aller Gestirne über dem Horizonte zu einem Maximum macht, so finden wir den Meridian, und diess ist die im Variations-Calcul gesuchte Curve oder Function; die jedesmalige Höhe eines Gestirnes über dem Horizonte ist aber nicht für die Punkte des Meridians ein Maximum (denn dieser hat nur ein einziges Maximum, nämlich den Punkt des Zeniths), sondern diess Maximum tritt für die Parallelkreise ein, indem die Gestirne vor und nach ihrem Durchgange durch den Meridian, also diesseits und jenseits, östlich und westlich, in den Parallelkreisen, tiefer stehen, als im Meridian selbst. Der Meridian ist bloss der geometrische Ort aller Maxima der Höhen der in den Parallelkreisen sich bewegenden Gestirne.

§ 11.

Ist dieser Gesichtspunkt einmal gewonnen und festgestellt, dann muss darauf gesehen werden, dass er möglichst allgemein bleibe, und nicht im Voraus zur Einseitigkeit herabgezogen werde. Alles kömmt nun darauf an, dass bei Functionen zweier unab-

hängig Veränderlicher statt zweier Gleichungen nur eine, bei Functionen dreier unabhängig Veränderlicher statt dreier Gleichungen nur zwei oder nur eine u. s. w. statfinden, und dass diese Gleichungen oder ihre Combinationen durch entsprechende Werthe Null eine Beziehung zum Maximum Minimum beibehalten. In allem Uebrigen ist der freieste, d. h. allgemeinste Spielraum gelassen.

Und in der That, wer sähe nicht augenblicklich ein, dass z. B. bei der Kugelfläche $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ unendlich viele grösste Kreise existiren, welche der geometrische Ort aller Maxima der Ordinaten z der Transversalkreise sind? Jeder ganz beliebige Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel giebt solche Kreise.

Und dass auch diess nicht der einzig mögliche Fall sein könne, leuchtet sogleich ein, wenn man erwägt, dass ausser den Normal-Schnitten auch Schnitte durch Flächen überhaupt möglich sind, die mit der gegebenen Fläche Curven erzeugen, die ein Maximum Minimum der Ordinaten z haben können. Diejenige Hauptcurve dann, welche alle diese Maxima Minima verbindet, und ihr geometrischer Ort ist, verhält sich zu diesen gerade so, wie die grössten Kreise der Kugelfläche zu den ihnen entsprechenden Parallelkreisen, und diese ist die Curve (Function), die in dem bisherigen Variations-Calcul jederzeit gesucht wird.

§ 12.

Erhebt man sich zu diesem ganz allgemeinen Gesichtspunkte, so begegnet man Problemen, die bei den Untersuchungen über die singulären Stammgleichungen des Integral-Calculs vorkommen, und die Leibniz im Jahre 1694 in seiner Abhandlung: „*Nova Calculi differentialis applicatio* zuerst in Anregung brachte. Leibniz charakterisirt sein Verfahren dabei als *differentiatio de curva in curvam.* Diese Aufgaben haben einige Berührungspunkte mit den Variations-Problemen, und ihr Unterschied besteht darin, dass bei ihnen die Durchschnitts- (Transversal-) Curven gegeben sind, während sie im Variations-Calcul als accessorisch erscheinen, und dass letztere immer Beziehungen auf Maximum Minimum haben, was bei den Leibniz'schen Problemen nicht der Fall ist.

Die beiderseitigen Probleme verhalten sich also, wie sich im Differenzial-Calcul die Untersuchungen über das erste Differenzial verhalten. Man kann das erste Differenzial einer Function in Beziehung auf einen gegebenen Werth überhaupt untersuchen, (den Leibniz'schen Problemen entsprechend) und man kann das erste Differenzial für den singulären Werth = Null untersuchen, was den Variations-Problemen entspricht.

§ 13.

Eines wird nun sogleich klar. Ist die Theorie, die sich aus der consequenten Verfolgung und Durchführung des gewonnenen Gesichtspunktes ergiebt, wirklich der historisch vorliegende Variations-Calcul, dann ist dieser kein besonderer Calcul, sondern nur ein Theil einer besonderen Anwendung des Differenzial-Calculs. Dann ist auch seine Stelle im System der Mathematik mit aller Sicherheit bestimmt. Der Differenzial-Calcul führt bei der Untersuchung über singuläre Werthe des ersten Differenzials auf die Lehre vom absoluten Maximum Minimum, wenn alle partiellen Differenzialien einzeln gleich Null sind. Sind aber nicht alle einzelnen partiellen Differenzialien zugleich Null, dann treten die Probleme ein, die man dem Variations-Calcul zuordnet. Diess ist sehr bestimmt und exact. Und dass aus letzterer Untersuchung reichere Resultate hervorgehen werden, als aus den gewöhnlichen Untersuchungen über Maxima und Minima ist schon darum zu erwarten, weil letztere so viel Gleichungen als unbekannte Grössen geben, wodurch alles unbeweglich und auf einzelne Werthe beschränkt bleibt, während die Variations-Probleme in ihren unbestimmten Gleichungen Beweglichkeit haben, und nicht bloss einzelne Werthe, sondern umfassende allgemeine Functionen einführen.

§ 14.

Ich behaupte nun, dass aus der Durchführung der eingeleiteten Aufgabe wirklich der historisch vorliegende Variations-Calcul in seiner Vollkommenheit hervorgeht, und werde in den nachfolgenden Abschnitten versuchen, diese Behauptung so zu begründen, dass sie unerschüttert bleibt.

Gelingt diess, dann trifft gewiss ein, was Pascal in seinen oft gerühmten Worten ausspricht: *une des raisons principales, qui éloignent ceux qui entrent dans les connaissances, du véritable chemin qu'ils doivent suivre, est l'imagination qu'on prend d'abord, que les bonnes choses sont inaccessibles, en leur donnant le nom de grandes, hautes, élevées, sublimes. Cela perd tout. Je le voudrais nommer basses, communes, familières.* Was könnte auch in der That einfacher und natürlicher sein, als dass man neben dem absoluten Maximum und Minimum auch die relativen Maxima und Minima untersucht, indem man nicht alle ersten partiellen Differenzialien zugleich Null setzt, was könnte familiärer sein, als dass die hieraus sich ergebenden Resultate im Differenzial-Calcul die Stelle einnehmen, die sie schon längst hätten einnehmen sollen?

§ 15.

Im Variations-Calcul haben die Hauptfunctionen (Hauptcurven, die der geometrische Ort aller Maxima Minima sind) nur einseitige Maxima und Minima. Sie könnten diesen Namen führen, oder sie könnten laterale oder relative Maxima Minima heissen. Da jedoch der letztere Ausdruck für ganz andere Probleme in Gebrauch ist, so dürfte die Benennung Variations-Maxima und Minima vorzuziehen sein. Einerseits ist der Variations-Calcul eine so reiche, ja unerschöpfliche Fundgrube der herrlichsten Resultate, dass er wohl die Auszeichnung einer eigenen Benennung verdient, und andrerseits ist durch die vorausgehenden Erklärungen jedes Missverständniss, das aus dem Gebrauche eines blossen Wortes entstehen könnte, abgeschnitten. In einer ächten Wissenschaft lohnt es sich nicht der Mühe, um einer blossen Benennung willen Worte mit Worten zu vertauschen, es genügt an der Feststellung der Begriffe. — Doch das im bisherigen Variations-Calcul gebrauchte Zeichen δ kann nicht beibehalten werden, da alle vorkommenden Operationen nichts als Differenzial-Operationen sind, für welche die feststehenden Zeichen d und ∂ gelten.

Ueber die Benennungen Hauptfunction und Transversal-Function ist schon das Nöthigste vorgebracht, und andere neue

Benennungen werden am besten da festgestellt, wo Gelegenheit dazu geboten wird.

Und somit schreiten wir zur Darstellung der Theorie selber, und schicken die Erinnerung voraus, dass die Lehren der analytischen Operationen des Variirens, die in den Theorieen dieses Calculs gewöhnlich den ersten Abschnitt bilden, bei uns gänzlich wegfallen. In solchen Theorieen wird nämlich regelmässig über den himmelweiten Unterschied des Variirens und Differenzirens gehandelt, es werden die Einschränkungen und Cautelen beigebracht, unter welchen die Variations-Operationen die Gesetze des Differenzirens annehmen können, und unter welchen nicht; endlich werden die Zeichen δ für sogenannte unendliche Variationen und andere eigene Zeichen für endliche Variationen festgestellt und erklärt. Diess alles fällt weg; denn da für uns keine eigenen Variations-Operationen gelten, sondern nur die Differenzial-Operationen, und zwar einzig in dem Sinne, in welchem sie im Differenzial-Calcul gebraucht werden, so ist die ganze Analysis, die wir vorauszusetzen haben, nur die Analysis des Differenzial-Calculs, die allgemein bekannt ist, und die in unseren Problemen nach den nämlichen Gesetzen, wie in allen anderen Problemen des Differenzial-Calculs, zur Anwendung kommen wird.

II.

Variation des Ausdrucks $z = f(x, y)$, in welchem weder Differenzialien noch Integralien der Veränderlichen x, y enthalten sind.

---

§. 16.

Das totale Differenzial dz des obigen Ausdrucks ist:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Die partiellen Differenzialien $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ sind einzeln gleich Null. Dadurch wird auch das totale Differenzial dz gleich Null, ohne dass dx und dy gleich Null werden oder zusammengehörige Werthe annehmen, da sie ganz willkürlich und von einander unabhängig bleiben.

Dieser Fall giebt, wie bekannt, die absoluten Maxima und Minima von z, und ist Behandlungs-Object des Differenzial-Calculs.

b) Es ist das totale Differenzial gleich Null, ohne dass zugleich die partiellen Differenzialien $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ gleich Null sind. Daraus entsteht die Differenzial-Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$, deren Auflösung durch Integration diejenige Function zwischen x und y giebt, die dz zu Null macht.

Da $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ eine vollständige Differenzial - Gleichung ist, so kann sie sogleich integrirt werden. Das Resultat ist die gegebene Function $f(x, y)$, aber nicht gleich z, sondern gleich einer Constante.

Dieser Fall gehört nicht zum Variations - Calcul, obgleich hie und da Beispiele dieser Art in den Variations - Theorieen behandelt werden. Es ist einleuchtend, dass die daraus hervorgehenden Resultate constanter Functionen keinerlei Verwandtschaft mit den Variationen haben können.

c) Durch stillschweigend oder ausdrücklich gemachte Substitution irgend einer Bedingungs - Gleichung $\psi(x, y) = 0$, durch welche dy durch dx oder dx durch dy ausgedrückt wird, geht das totale Differenzial $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ in die Form über: $dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \psi'(x, y)\right) dx$.

Wird nun diejenige Function gesucht, die $\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \psi'(x, y)\right) dx$ zu Null macht, so fällt dx durch Division aus, und dz wird für alle Werthe der gefundenen Function $\varphi(x, y)$ gleich Null.

Die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \psi'(x, y) = 0$ ist die Variations-Gleichung, und alle hieher gehörigen Probleme sind wahre Variations - Probleme.

Die Substitution kann, wie bemerkt, auch stillschweigend stattfinden. Denn wird in $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ z. B. bloss $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ gesetzt, dann folgt $dz = \frac{\partial z}{\partial y} dy$, und das totale Differenzial wird nun, da $\frac{\partial z}{\partial y}$ nicht gleich Null sein kann, durch den Werth: $dy = 0$, zu Null, woraus $y = c$ als Bedingungs - Gleichung (ψ) folgt. Diess ist, geometrisch interpretirt, ein mit der Ebene XZ paralleler Schnitt der Fläche, der unbewusst vorausgesetzt wird, wenn $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ genommen wird. Hingegen der andere Factor von

$\frac{\partial z}{\partial y} dy$, nämlich $\frac{\partial z}{\partial y}$, ist nicht gleich Null, sondern behält einen von x und y abhängigen endlichen Werth.

§ 17.

Die vorstehenden Gleichungen werden geometrisch interpretirt, wie folgt:

a) $z = f(x, y)$ ist die Gleichung einer Fläche, in der die Ordinate z von den unter sich unabhängigen Ordinaten x und y abhängig gedacht wird.

b) In $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ ist dz das totale Differenzial, und die tangirende Ebene ist der geometrische Ort aller Endpunkte der geraden Linien $z + dz$, nach allen Richtungen des Punkts (x, y, z), da die geraden Linien dx und dy willkürlich genommen werden können. Das partielle Differenzial $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ giebt alle Punkte in der tangirenden Ebene, die durch den mit ZX parallelen Schnitt gebildet werden. Diess ist eine gerade, in der tangirenden Ebene liegende, Linie und ist der geometrische Ort aller Endpunkte von $z + dz_x$, wenn dz_x das partielle Differenzial nach x bezeichnet. — Das Analoge gilt von $\frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Sind die beiden partiellen Differenzialien gleich Null, so sind zwei senkrecht aufeinander stehende Linien in der tangirenden Ebene parallel mit der Ebene XY, d. h. die tangirende Ebene ist mit der Axen-Ebene XY parallel, alle dz sind Null, und die Entfernung beider parallelen Ebenen ist gleich z. Diess sind die absoluten Maxima und Minima des Differenzial-Calculs.

c) Die Gleichung $0 = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, in der dy nicht durch dx ausgedrückt werden kann, weil keine Bedingungs-Gleichung gegeben ist, giebt integrirt $c = f(x, y)$, und geometrisch: einen mit der Ebene XY parallelen Schnitt der Fläche $z = f(x, y)$, also eine ebene Curve, in der kein veränderliches z enthalten ist.

d) Die Variations-Gleichung: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \psi'(x, y) = 0 = dz$ drückt diejenige gerade Linie in der tangirenden Ebene aus, die durch den Punkt (x, y, z) geht, und mit der Ebene XY parallel ist. Denn da für diese Linie das Differenzial dz gleich Null ist, muss sie parallel mit XY sein. Die Richtung dieser Linie wird durch die gegebene Bedingungs-Gleichung $\psi'(x, y) = 0$ bestimmt.

Und in der That, wenn die tangirende Ebene nicht parallel mit XY ist (der Fall der absoluten Maxima Minima), so muss sie die Ebene XY in einer geraden Linie durchschneiden, und jede Linie der tangirenden Ebene, die mit der Durchschnittslinie parallel ist, ist auch parallel mit XY, und diejenige Parallele, die zugleich durch den Punkt (x, y, z) geht, wird durch $\psi(x, y) = 0$ bestimmt.

Fig. I.

Es sei *Fig. I.* eine Fläche von der Gleichung $z = f(x, y)$, welche die Ebene XY in der Curve *kmoh* durchschneidet, und in den Coordinaten-Räumen $+Z +X +Y$; $+Z +X -Y$, ausgebreitet ist.

Die tangirende Ebene am Punkte c, (x, y, z), habe eine solche Lage, dass sie die Ebene XY in einer mit OY parallelen Linie durchschneide, dann ist tg (die Linie in der tangirenden Ebene, die durch den Parallelschnitt mcn gebildet wird) parallel mit mn, und alle totalen Differenzialien von z, die durch die Linie tg bestimmt werden, sind gleich Null, während andere Linien dz (z. B. die Linie bf, welche durch den Axenschnitt icO bestimmt wird) beliebig grosse von x, y und dx abhängige Werthe haben können. Ist $pbq \mathrel{\#} tcg$, dann haben alle dz, deren geometrischer Ort die Linie pbq ist, den gleichen Werth bf, weil nun auch $pq \mathrel{\#} kh$ ist. Die Bedingungs-Gleichung ist hier $(Or)\, x = c$, also $dx = 0$ und daraus $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, d. h. das partielle Differenziale von z nach y, also nach der Richtung mn, genommen, ist gleich Null, woraus wieder folgt, dass die Linien tg und mn parallel sind. Diess gilt bei der Bedingungs-Gleichung

$x = c$ für alle Parallel-Curven, *mcn*, *kih* .. Haben diese Curven c, i, .. Maxima von z, nämlich *cr*, *iv*, .. so ist *Oci* die Curve, welche alle diese Maxima verbindet, und heisst Variations-Curve (Hauptcurve); die Curven *mcn*, *kih*, .. sind die Transversal-Curven, ihre Tangenten geben $dz = 0$, während die Tangente der Hauptcurve, nämlich *cb*, den Werth $dz = bf$ giebt. Im gegebenen Falle ist daher für die Transversal-Curve der Werth $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ gleich Null, und für die Hauptcurve der Werth $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ gleich *bf*.

§ 18.

So viel wird hier sogleich klar, dass, wenn aus irgend einem Grunde das Maximum Minimum an der Variations-Curve *Oci* statt an der Transversal-Curve *mcn* experimentirt wird, unentwirrbare Verwicklungen eintreten müssen, da die Variations-Curve am Punkte c weder ein Maximum noch ein Minimum von z, sondern hier fortwährend zunehmende Werthe hat, während allerdings die Transversal-Curve in c ein Maximum von z hat.

Auch eine andere, den Variations-Calcul berührende Schwierigkeit findet hier eine leichte und natürliche Lösung. In der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ sind x und y von einander unabhängig. Durch Hinzutritt der Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y) = 0$ (durch den Parallel-Schnitt *mcn*) werden x und y in der Variations-Curve von einander abhängig, d. h. es handelt sich nicht mehr um alle Punkte der Fläche, sondern um alle Punkte der Curve *Oci*, die sämmtliche Maxima der Transversal-Curven verbindet. Wird daher von der Gleichung der Fläche zur Gleichung der Curve übergegangen, so werden naturgemäss die bisher unabhängigen Variabeln abhängig; und wird von der Gleichung der Curve zur Gleichung der Fläche übergegangen, so werden die in der Curve abhängigen Variabeln wieder unabhängig von einander. Diess ist so klar und allgemein bekannt, dass es keiner weiteren Ausführung bedarf.

In den nun folgenden Beispielen werden wir die analytischen Resultate mit ununterbrochener geometrischer Interpretation be-

gleiten, um so mehr, als die hier eingeführten Probleme zum erstenmale als Probleme des Variations-Calculs in diesem Sinne erscheinen und darum die grösste Bestimmtheit und Anschaulichkeit verlangen.

Die Behandlungsweise bleibt dessenungeachtet rein analytisch; sie wird sich in keiner Weise auf Eigenthümlichkeiten stützen, die den geometrischen Grössen als solchen zukommen. Denn das analytische Problem ist einfach folgendes:

Als Elemente kommen vor: a) die Function der unabhängig Veränderlichen, $z = f(x, y)$; b) die Bedingungs-Gleichung: $\psi(x, y) = 0$; c) die Variations-Function: $\varphi(x, y) = 0$. Es sollen die Werthe von z gesucht werden, welche in der Bedingungs-Gleichung $\varphi = 0$ absolute Maxima Minima sind, und welche die Endgleichung $\varphi = 0$ zur Variations-Gleichung machen.

§ 19.

Erste Verfahrungsweise.

Gegeben sind: $z = f(x, y)$, und die Bedingungs-Gleichung: $\psi(x, y) = 0$ mit einer beliebigen Constante a. Es soll die Variations-Gleichung gesucht werden.

Auflösung. Man substituirt aus der Gleichung $\psi = 0$ die Werthe x oder y in die Gleichung z, woraus man entweder $z = f(x, a)$ oder $z = f(y, a)$ erhält. Daraus sucht man entweder $\frac{dz}{dx} = 0$ oder $\frac{dz}{dy} = 0$, und eliminirt dann beliebig aus je zwei der folgenden Gleichungen: $\left(\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dy} = 0\right)$; $\left(\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \psi = 0\right)$; $\left(\frac{dz}{dy} = 0 \text{ und } \psi = 0\right)$ die willkürliche Constante a. Als Resultat erhält man die Variations-Function $\varphi(x, y) = 0$. (Geometrisch interpretirt ist $z = f(x, y)$ eine gegebene Fläche; $\psi = 0$ die Projection der Transversal-Curve in der Ebene XY; und $\varphi = 0$ die Projection der Variations-Curve in der nämlichen Ebene XY).

Ist die Variations-Curve gefunden, dann geht man zum zweiten Differenzial von z über, um entscheiden zu können, ob ein Maximum oder Minimum stattfindet, wobei aber nicht die Variations-Gleichung $\varphi = 0$, sondern die Bedingungs-Gleichung $\psi = 0$ in $d^2 z$ substituirt werden muss. Macht der substituirte Werth das zweite Differenzial positiv, so tritt ein Minimum ein, macht er dieses Differenzial negativ, so tritt ein Maximum ein, ganz so, wie bei den übrigen Problemen über Maxima und Minima.

Beispiel I.

Gegeben ist die Kugelfläche: $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$, und die Bedingungs-Gleichung: $\psi = (\xi + \mu\eta - a) = 0$. (Diese Gleichung $\psi = 0$ stellt eine auf XY senkrechte Ebene vor, und für alle der Ebene und der Kugelfläche gemeinschaftlichen Punkte sind (ξ und x), (η und y) einander gleich. Diese gemeinschaftlichen Punkte bestimmen die Parallelkreise der Kugelfläche, wie allgemein bekannt ist.)

Wird aus ψ der Werth $x = a - \mu y$ in z substituirt, so ist

$$z^2 = r^2 - (a - \mu y)^2 - y^2;\; z dz = ((a - \mu y)\mu - y)\, dy = 0;$$

$$a = y\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right).$$

Diess giebt in Verbindung mit ψ, durch Elimination von a, die Variations-Curve $\varphi = \mu x - y = 0$, d. h. eine auf $\psi = (x + \mu y - a) = 0$ senkrecht stehende und durch den Mittelpunkt O gehende gerade Linie, oder eine auf XY senkrechte Ebene, die im Durchschnitt mit der Kugelfläche einen grössten Kreis giebt, der alle Werthe z in allen Parallelkreisen zu Maxima macht.

Denn wird $z dz$ noch einmal differenzirt, so folgt $z d^2 z = -(\mu^2 + 1)\, dy^2$, ein für alle Werthe von μ und dy negativer Ausdruck.

Nimmt man jedoch z negativ, d. h. die Ordinaten der Kugelfläche, die unter der Ebene XY liegen, dann wird $-z d^2 z = -(\mu^2 + 1)\, dy^2$, d. h. man erhält negative Maxima der Ordinaten z der Parallelkreise unter der Ebene XY, wie auch aus geometrischer Betrachtung einleuchtend und allgemein bekannt ist.

Beispiel II.

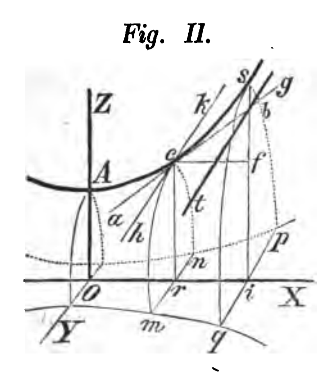


Fig. II.

α) Gegeben ist die Gleichung: $c^2z^2 = (c^2+x^2)^2 - c^2y^2$ und die Bedingungs-Gleichung $\psi = (x - a) = 0$. (Die erstere Gleichung stellt eine concav-convexe Fläche vor (Fig. II.); die Bedingungs-Gleichung $x = a$, z. B. $x = Or$ giebt den mit ZY parallelen Schnitt mcn.)

Die Parallel-Schnitte mcn, qsp &c. haben in den Punkten c, s .. Maxima von z (cr, si ..); es wird die Variations-Curve Acs gesucht, die sämmtliche Maxima verbindet.

Der Werth $x = a$ in c^2z^2 substituirt, und die Gleichung $c^2z^2 = (c^2 + a^2)^2 - c^2y^2$ differenzirt, giebt $zdz = -ydy = 0$, also $y = 0$. Diese Gleichung giebt die Axe OX; und der Durchschnitt der Ebene ZX mit der gegebenen Fläche giebt die Variations-Curve Acs.

Das zweite Differenzial giebt: $zd^2z = -dy^2$, einen für alle positiven z negativen Werth. Die Curve Acs giebt daher Maxima von z, d. h. die Transversal-Curven mcn, qsp .. werden von der Variations-Curve in $z = AO$, $z = cr$, $z = si$ .. im Maximums-Stande von z durchschnitten.

β) Gegeben ist die nämliche Flächen-Gleichung und die Bedingungs-Gleichung $\psi = (y - b) = 0$. (Die Gleichung $y - b = 0$ giebt Schnitte, die mit Acs parallel sind, und es ist einleuchtend, dass diese im Axenschnitt AOY Minima von z geben müssen, wie auch der Calcul zeigt.)

Es ist $c^2z^2 = (c^2 + x^2)^2 - c^2b^2$

$c^2zdz = 2(c^2 + x^2)x\,dx = 0$, also $x = 0$, d. h. der Axenschnitt durch ZOY.

Das zweite Differenzial giebt für $x = 0$ den Werth $2c^2dx^2$, der unbedingt positiv ist, also ein Minimum giebt. — Die Variations-Curve ist die Curve YA.

γ) Gegeben sind: die nämliche Fläche und die Bedingungs-Gleichung $\psi = (x + y - a = 0)$, Linien, welche die Axen X und Y unter halben rechten Winkeln durchschneiden.

Der Werth $y = a - x$ substituirt giebt:

$$c^2 z^2 = (c^2 + x^2)^2 - c^2 (a - x)^2,$$
$$c^2 z dz = (2 (c^2 + x^2) x + c^2 (a - x)) dx = 0,$$
$$2 (c^2 + x^2) x + c^2 (a - x) = 0.$$

Diess mit $y = a - x$ combinirt giebt:

$$2 (c^2 + x^2) x + c^2 y = 0.$$

Diese Variations-Curve ist eine Curve der dritten Ordnung, die bloss in den Ebenen $(+ X - Y)$ und $(- X + Y)$ liegt, da positiven Werthen von x negative Werthe von y, und umgekehrt entsprechen.

Wird die Transversal-Curve untersucht, ob sie Maxima oder Minima von z giebt, so wird

$$c^2 z d^2 z = (c^2 + 6 x^2) dx^2$$

für alle Werthe von x positiv, so dass die Variations-Curve $(2 (c^2 + x^2) x + c^2 y) = 0$ Minima von z bestimmt.

Zusatz. Würde man die Variations-Curve statt aus $\left(\frac{dz}{dx} \text{ und } \psi\right)$ aus $\left(\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dy} = 0\right)$ bestimmt haben, so würde die Gleichung erfolgt sein: $(2 (c^2 + x^2) x + c^2 y) (1 + (2 (c^2 + x^2) x + c^2 x^2)^2) = 0$, deren einziger reeller Factor die oben gefundene Variations-Curve ist. Bemerkt wird, dass auch in der Bedingungs-Gleichung $(x + y - a) = 0$ einem positiven x ein negatives y entsprechen muss, wodurch die Richtung der Transversal-Curven bestimmt wird.

Beispiel III [1]).

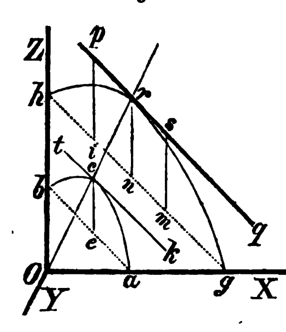
Gegeben ist die Kegelfläche: $z^3 = xy^2$.

α) Die Bedingungs-Gleichung ψ sei: $(x + y - a) = 0$ (die Linien ab, gh .. in *Fig. III.*). Der Werth $x = a - y$ in

---

1) Lehmus „Aufgelöste Aufgaben" Aufgabe I.

Fig. III.



$z^3 = xy^2$ substituirt, giebt $z^3 = (a-y)y^2$
$3z^2dz = (2ay - 3y^2)\,dy = 0,\ 2a = 3y.$

Diess mit ψ combinirt, giebt $2x = y$, die Variations-Curve in der Ebene XY. Diese Linie bestimmt im senkrechten Durchschnitte mit der gegebenen Fläche die Gerade Or, welche in den Transversal-Curven acb, grh.. die Werthe $z = ce$, $z = rn$.. zu Grössten macht. Denn $3z^2dz = (2ay - 3y^2)\,dy$ noch einmal differenzirt, und $3y = 2a$ substituirt, giebt $3z^2d^2z = -2ady^2$, was unbedingt negativ ist.

Zusatz. Die tangirende Ebene dieser Kegelfläche wird durch die Linien tk, cr bestimmt. Alle dz in der Linie tk sind Null; alle dz, deren geometrischer Ort die mit tk parallele Linie pq ist, sind einander gleich ($pi = vn = sn.. = z + dz_t$), während für die übrigen Punkte der tangirenden Ebene die Werthe dz verschieden sind.

β) Die Bedingungs-Gleichung sei $\psi = (y^2 + x^2 - r^2) = 0$. (Diess ist eine auf XY senkrechte Cylinderfläche mit kreisförmiger Basis, deren Kreise immer grösser werden, und sämmtlich ihren Mittelpunkt in O haben. Diese Cylinderflächen durchschneiden die gegebene Fläche in Curven, die in bestimmten Punkten Maxima von z haben. Welche Curve (Variations-Curve) verbindet alle diese Maxima?

Wird aus Gleichung ψ der Werth von y in z substituirt, so ist:

$$z^3 = x(r^2 - x^2);\ 3z^2dz = (r^2 - 3x^2)\,dx = 0.$$

Die Combination von $r^2 - 3x^2 = 0$ mit $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ giebt die Variations-Curve $y = x\sqrt{2}$, eine durch O gehende Gerade. Der Werth $3z^2d^2z = -6x\,dx^2$ giebt Maxima für positive x und negative Maxima für negative x, denen auch negative z entsprechen.

γ) Die Bedingungs-Gleichung sei $y^2 = 4a^2 - 2ax$, Fig. IV. (senkrechter Cylinder mit parabolischer Basis, die Curven pc, Xk..

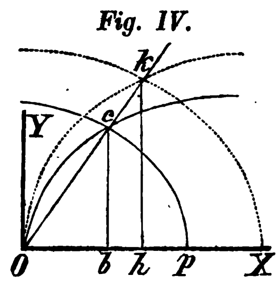


Fig. IV.

Welche Punkte ihres Durchschnittes mit der Fläche $z^3 = xy^2$ geben Maxima von z in ihnen, und welche Variations-Curve verbindet alle diese Maxima?)

Die Substitution von $y^2 = 4a^2 - 2ax$ in $z^3 = xy^2$ giebt

$z^3 = 4a^2x - 2ax^2$; $3z^2dz = (4a^2 - 4ax)\,dx$
$= 0,\ x = a.$

Diese Gleichung mit ψ combinirt, giebt $y^2 = 2x^2$, $y = x\sqrt{2}$. Die Gerade Ock ist die Variations-Curve im Durchschnitte mit der gegebenen Fläche. Das zweite Differenzial ist unbedingt negativ, und darum sind die gefundenen Werthe Variations-Maxima.

Zusatz. Obige Beispiele, die in Bezug auf verschiedene Flächen und verschiedene Bedingungs-Gleichungen in's Unendliche variirt werden könnten, genügen zur vollkommenen Verdeutlichung der vorgeschlagenen Methode.

§ 20.

Zweite Verfahrungsweise.

Diese unterscheidet sich von der ersten nur darin, dass die Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y, a) = 0$ sogleich differenzirt wird, und dass die aus $d\psi = 0 = Mdx + Ndy$ folgenden Werthe dx oder dy sogleich in $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ substituirt werden, wodurch die Gleichung $dz = 0$, d. h. $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ hervorgeht, aus der in derselben Weise, wie im ersten Verfahren, die weiteren Resultate abgeleitet werden.

Ist in der Bedingungs-Gleichung $\psi = 0$ die willkürliche Constante a bloss durch Addition oder Subtraction mit x und y verbunden, so verschwindet sie in $d\psi = 0$, und es wird die Variations-Curve unmittelbar aus $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ gefunden. Ist hingegen a durch Multiplication oder andere Operation mit x und y verbunden, dann kann sie erst durch Combination mit

der Gleichung $\psi = 0$ eliminirt werden, wie bei der ersten Verfahrungsweise. Wird sie aber nicht eliminirt, so giebt sie eine Auflösung, die dem Probleme singulär, d. h. für jede Constante a genügt, eine Auflösung, die sich zur Variations-Function gerade so verhält, wie sich die singulären Integrale zu den vollständigen Integralen der Differenzial-Gleichungen verhalten.

Beispiel 1. In § 19, III, β, sind gegeben:

$$z^3 = xy^2 \text{ und } \psi = 0 = x^2 + x^2 - r^2.$$

Es wird $d\psi = 0 = xdx + ydy$, und $ydy = -xdx$ in $3z^2dz = y^2dx + 2xydy$ substituirt, giebt $(y^2 - 2x^2)\,dx = 0$, also $y^2 = 2x^2$, $y = x\sqrt{2}$, wie Oben.

Beispiel 2. In § 19, III, γ, sind gegeben:

$$z^3 = xy^2 \text{ und } \psi = 4a^2 - 2ax - y^2 = 0.$$

$$d\psi = adx + ydy = 0.$$

Diess in $3z^2dz = y^2dx + 2xydy = 0$ substituirt, giebt $y^2 - 2ax = 0$.

Diese Gleichung giebt in Combination mit Gleichung $y^2 = 4a^2 - 2ax$ die früher gefundene Variations-Curve $y = x\sqrt{2}$.

Zusatz. Die Gleichung mit der willkürlichen Constante $y^2 = 2ax$ (Parabel) verhält sich zur Variations-Curve $y = x\sqrt{2}$, wie sich bei der Integration der Differenzial-Gleichungen die singuläre Stammgleichung zum vollständigen Integral verhält. Beide Lösungen genügen der geometrischen Anforderung; denn die Durchschnittspunkte aller zusammengehörigen Parabeln (pc und Oc); (Xk und Ok) bestimmen alle Punkte der allgemeinen Curve Ock. Doch als Variations-Curve kann nur die allgemeine Gleichung $y = x\sqrt{2}$ gelten.

§ 21.

Dieses Verfahren hat den Vorzug, dass es auch sogleich angewendet werden kann, wenn die Bedingungs-Gleichungen $\psi = 0$ ausser x und y noch ihre Differenzialien enthalten, Bedingungs-Gleichungen, bei denen Substitutionen im Sinne der ersten Verfahrungsweise unmöglich sind.

Wird z. B. gefragt: Welche Curve auf der Fläche $z = f(x, y)$ hat die Eigenschaft, dass sie in allen Punkten Maxima Minima

von z für ihre Normal-Schnitte giebt, d. h. für alle Schnitte, die in jedem Punkte auf ihrer Tangente senkrecht stehen, also eine veränderliche Richtung haben?

Die Bedingungs-Gleichung ψ ist in diesem Falle

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0,$$

worin die Ordinaten ξ und η für die Normale, und x und y für jeden Punkt der gesuchten Curve gelten.

Das dabei einzuhaltende Verfahren gründet sich auf den Lehrsatz, dass für die geforderten Normal-Schnitte der Werth dz gleich Null wird, und dass sich für diese Richtung der Transversal-Curven die bisher wilkürlichen Zunahmen dy, dx wie $(\eta - y)$ und $(\xi - x)$ verhalten müssen. Denn nur dadurch, dass diese Abhängigkeit von dx und dy gesetzt wird, wird bei Normal-Schnitten das Differenzial $dz = 0$; für jedes andere Verhältniss von dy und dx behält auch bei Normal-Schnitten dz einen willkürlichen Werth.

Dadurch geht die totale Differenzial-Gleichung von y in folgende über: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) = 0.$

Diese mit der Normalgleichung: $(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0$ combinirt, giebt: $\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dx}\right)(\eta - y) = 0$; oder $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0.$

Aus dieser höchst einfachen Gleichung wird die Variations-Curve unmittelbar durch Integration bestimmt.

Beispiele.

I. Auffindung der Variations-Function.

1. Welche Curve auf der Kugelfläche bildet mit allen ihren Normal-Schnitten Maxima Minima von z?

(Man weiss a priori, dass jeder grösste Kreis der Kugelfläche seinen Parallelkreisen gegenüber diese Eigenschaft hat, und diess zeigt auch der Calcul.)

Wird aus $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -x$ in $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0$ substituirt, so folgt: $-y + \frac{x dy}{dx} = 0$, woraus

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ und $log\ y = log\ x + log\ \alpha$, $y = \alpha x$ abgeleitet wird. Die Gleichung $y = \alpha x$ drückt aber jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende und auf XY senkrecht stehende Ebene aus, deren Durchschnitt mit der Kugelfläche jeden grössten Kreis giebt.

2. Welche Curve auf der Fläche: $z^3 = xy^2$ giebt mit allen ihren Normal-Schnitten Maxima Minima der Ordinate z?

Die Substitutionen von $\frac{\partial z}{\partial y}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0$ geben: $2yx - \frac{y^2 dy}{dx} = 0$. Daraus findet man durch Integration $2x^2 - y^2 = c^2$.

Diess sind Hyberbeln, die mit der gegebenen Fläche die Axen X und Y gemeinschaftlich haben, die Constante c mag so gross oder so klein sein, wie immer. Der besondere Fall: $c = 0$ giebt $2x^2 - y^2 = 0$, $y = x\sqrt{2}$, die schon Oben gefundene Curve. Diese ist die Asymptote sämmtlicher der Aufgabe entsprechender Hyberbeln; in ihr, als einer geraden Linie, sind allerdings die Normal-Schnitte parallel (wie in der früheren Aufgabe verlangt wurde), während sie bei den Hyperbeln je nach der Krümmung der Curven in allen Punkten verschiedene Richtungen annehmen.

II. Unterscheidung des Maximums vom Minimum.

Zu diesem Behufe bestimmt man das zweite Differenzial von z, aber nicht etwa für die gefundene Variations-Curve, sondern für die Normal-Schnitte, denn in diesen haben die Ordinaten z absolute Maxima Minima.

1. Kugelfläche.

In die Gleichung der Normale: $(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0$ die Werthe dx und dy aus $y = \alpha x$ substituirt, folgt $(\xi - x) + \alpha(\eta - y) = 0$, worin ξ, η die Veränderlichen sind. Diess mit der Gleichung der Kugelfläche: $z^2 = r^2 - \xi^2 - \eta^2$ combinirt, giebt:

$$z^2 = r^2 - (x - \alpha(\eta - y))^2 - \eta^2;$$

$$zdz = -(x - \alpha(\eta - y)\,\alpha + \eta)\,d\eta;\ zd^2z = -(\alpha^2 + 1)\,dy^2,$$

einen für alle Werthe von α negativen Ausdruck, aus dem z als Maximum erkannt wird.

2. Die Fläche $z^3 = xy^2$.

Die Substitution von $\frac{dy}{dx}$ aus: $2x^2 - y^2 = c^2$, $2xdx - ydy = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$ in $(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0$ giebt: $(\xi - x) + \frac{2x}{y}(\eta - y) = 0$. Diess mit der Gleichung $z^2 = \xi\eta^2$ combinirt, giebt:

$$z^3 = \left(3x - \frac{2x}{y}\eta\right)\eta^2;\quad 3z^2dz = \left(6x\eta - \frac{6x\eta^2}{y}\right)d\eta = 0;$$

$$3z^2d^2z = \left(6x - \frac{12x\eta}{y}\right)d\eta^2.$$

Aus Gleichung $3z^2dz = 0$ den Werth $\eta = y$ substituirt, giebt: $3z^2d^2z = (6x - 12x)\,dy^2$, was unbedingt negativ ist. Die Variations-Curve giebt daher Maxima von z.

§ 22.

Zusatz 1. Wenn statt der Normale eine andere von der Krümmung der Curve abhängige Bedingungs-Gleichung gegeben ist, z. B. eine Linie, die mit der jedesmaligen Normale einen bestimmten Winkel macht: $(\xi - x)\,dx + \alpha\,(\eta - y)\,dy = 0$, so bleibt das Verfahren ganz dasselbe.

Es sei z. B. gegeben: $z^3 = xy^2$ und $\varphi = (\xi - x)\,dx + 2\,(\eta - y)\,dy = 0$. Es folgt dann: $-\frac{ydy}{dx} + x = 0$; $x^2 - y^2 = c^2$, eine gleicharmige Hyperbel, und singulär die Asymptote, $x = \mp y$. Die Probleme dieser Art können überhaupt in's Unendliche variirt werden.

Zusatz 2. Ist die Normale die Bedingungs-Gleichung ψ, so folgt: $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0$ als Gleichung der Variations-Curve.

Für andere Bedingungs-Gleichungen erfolgen andere Endgleichungen und für öfter vorkommende Functionen können die Endgleichungen der leichteren Uebersicht willen sogleich vorangestellt werden. — Nichts hindert, dass der Factor von $\frac{\partial z}{\partial x}$ (der für die Normale gleich $\frac{dy}{dx}$ ist, und den wir allgemein mit F

bezeichnen wollen, irgend eine Function von $(x, y, dx, dy, d^2y\,..)$ ist. Der ganze Unterschied besteht darin, dass man in solchen Fällen eine Differenzial-Gleichung des zweiten, dritten oder höheren Grades erhält, die integrirt die gesuchte Variation giebt.

Ist z. B. statt der Normale die Parabel gegeben: $\pi = (\xi - x) + (\eta - y)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}(\eta^2 - y^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (eine die Normale tangirende, und auf der Curve in jedem Punkte senkrecht stehende Parabel), so wird, aus π der Ausdruck $(\xi - x)$ in $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) = 0$ substituirt: $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{dy}{dx} + y\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$.

Für die Fläche $z^3 = xy^2$ geht diese Gleichung in die homogene Differenzial-Gleichung $2xdx^2 - ydxdy - y^2d^2y$ über.

Durch die Substitutionen: $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ wird sie auf die Differenzial-Gleichung ersten Grades: $(2 - up)\,du = (pu^2 - u^3)\,dp$ zurückgeführt, deren Integration die Variations-Curve giebt.

§ 23.

Beweis der vorhergehenden Lehrsätze.

Sind die Gleichung: $z = f(x, y)$ und die Bedingungs-Gleichung: $\psi(x, y, a) = 0$ gegeben, und legt man der Grösse a nur einen einzelnen Werth bei, so ist das Problem einfach folgendes: Es soll das absolute Maximum oder Minimum von z als einer Function von nur einer Veränderlichen gefunden werden, (da man aus $z = f(x, y)$ mit Hilfe der Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y, a) = 0$ die eine Veränderliche eliminiren kann). Insoweit ist die Aufgabe eine gewöhnliche Maximums-Minimums-Aufgabe, und ist im Differenzial-Calcul unzähligemal behandelt worden. — Auch die aus dem zweiten Differenzial d^2z folgenden Criterien sind die nämlichen, wie bei den gewöhnlichen Aufgaben über Maximum und Minimum.

Geometrisch interpretirt geben die Gleichungen: $z = f(x, y)$ und $\psi(x, y, a) = 0$ eine Curve, deren Projectionen auf den Ebe-

nen XZ und YZ durch die Gleichungen $z = f(x, a)$, $z = f(y, a)$ bestimmt sind. Die Werthe $\underset{x}{dz} = 0$ *oder* $\underset{y}{dz} = 0$ in Verbindung mit $\underset{x}{d^2z} = \mp$ oder $\underset{y}{d^2z} = \mp$, bestimmen die absoluten Maxima oder Minima in den Projections-Curven, wie aus dem Differenzial-Calcul bekannt ist, und keines weiteren Beweises bedarf. Diess gilt für jeden einzelnen Werth, den man der willkürlichen Grösse a beilegt, z. B. für alle Kreise einzeln, ihre Radien mögen so gross oder so klein sein, wie immer, da die Resultate ganz unabhängig von der willkürlichen Grösse a gefunden werden. —

Nun giebt $\underset{x}{dz} = 0$ die Grösse x durch die Constante a ausgedrückt, ($x = Fa$), eben so $\underset{y}{dz} = 0$ die Grösse y durch die Constante a ausgedrückt, ($y = \Phi a$). Indem man durch die Verbindung beider Gleichungen, oder durch ihre Verbindung mit $\psi(x, y, a) = 0$ die Constante a eliminirt, erhält man eine Function zwischen x und y, ($\varphi(x, y) = 0$), welche alle absoluten Maxima oder Minima der Functionen ($z = f(x, y)$ und $\psi(x, y, a) = 0$) enthält. Die Functionen ($z = f(x, y)$ und $\psi(x, y, a) = 0$) aber repräsentiren ein System continuirlich aufeinander folgender Functionen, wenn der Constante a beliebige continuirlich aufeinander folgende Werthe beigelegt werden. Setzt man in $\varphi(x, y) = 0$ $x = Fa$, dann folgt $y = \Phi a$, weil $\varphi(x, y) = 0$ aus den beiden Gleichungen $x = Fa$ und $y = \Phi a$ abgeleitet ist. Nun ist Fa jeder beliebige, von $\varphi(x, y) = 0$ unabhängige Werth; es folgt daher für jeden beliebigen Werth x oder y derjenige Werth Φa oder Fa, der z zu einem Maximum oder Minimum in der Function: ($z = f(x, y)$ und $\psi(x, y, a) = 0$) macht. Diess ist aber die gesuchte Variations-Function, oder geometrisch: der Ort aller Maxima Minima der nach irgend einem Gesetze aufeinander folgenden Transversal-Curven, und diess ist auch, was in dem historisch vorliegenden Variations-Calcul gesucht wird.

Der Beweis für die nach dem zweiten Verfahren abgeleiteten Resultate ist derselbe und kann noch durch Folgendes erläutert werden: Die Variation wird allgemein durch die Be-

dingungs-Gleichung: $dz = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} F(x, y, dx, dy, d^2y \ldots) = 0$ bestimmt, und $dz = 0$ zeigt an, dass ein Maximum oder Minimum überhaupt stattfindet. Weil nur eine Gleichung, aber zwei Veränderliche gegeben sind, so wird nicht ein einzelner Werth, sondern ein ganzes System aufeinander folgender Maximums- und Minimums-Werthe bestimmt. Functionen von solcher Eigenschaft sind aber Variations-Functionen.

§ 24.

Erörterung über die Bedingungs-Gleichung $dx = 0$, d. h. $x = c$, woraus im totalen Differenzial $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$ (da $dx = 0$ ist) von selbst die Variations-Gleichung $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ folgt.

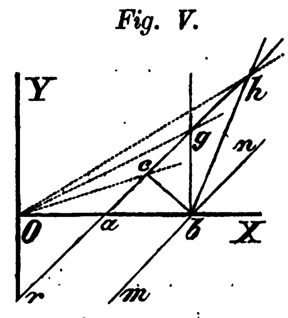
Die vorstehende Bedingungs-Gleichung giebt in vielen Fällen entsprechende Resultate, in vielen aber auch nicht, z. B. nicht in $z^2 = xy$, in $z^3 = xy^2$, und in unzählig vielen anderen, wie der Calcul zeigt. Und in der That geben für $x = c$ die Parallel-Schnitte mit YZ Parabeln von den Gleichungen $z^2 = cy$, $z^3 = cy^2$ u. s. w., die immer wachsende z, also für keinen Werth von y ein Maximum oder Minimum haben. Wohl aber geben andere willkürliche Bedingungs-Gleichungen z. B. $x + \beta y = c$ brauchbare Resultate und Variations-Curven.

Da jedoch im bisherigen Variations-Calcul unter den unendlich vielen möglichen Endgleichungen der Ausdruck $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ als die einzig mögliche Variations-Gleichung genommen wird (bei der man also $x = c$, d. h. den Parallel-Schnitt mit YZ unbewusst voraussetzt, und auch wirklich darnach verfährt, indem man bei der Differenzirung von dz die Grösse x als Constante, demnach x als gleich c behandelt), so wollen wir eines der hieher gehörigen und schönsten Beispiele des bisherigen Variations-Calculs analysiren, damit dieser Punkt allseitig erörtert werde.

Strauch[1]) und Stegmann[2]) haben das Problem aufgestellt und gelöst, „die Curve zu finden, die in jedem ihrer Punkte das Product der Ordinate und der um die Ordinate verminderten Abscisse grösser macht, als es an der nämlichen Abscisse irgend eine andere Curve machen kann“.

Das Product $y(x-y)$ sei gleich U, so kann $U = cz$, $= z^2$, $= \frac{z^3}{c}$ etc. sein. Es sei Og die Curve, die $U = bg\,(Ob - bg)$ in allen Punkten zu einem Maximum macht *(Fig. V)*.

Fig. V.



Aus $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ folgt $x - 2y = 0$; also die Gerade von der Gleichung $x - 2y = 0$ (die Linie Og) ist die verlangte Curve.

Dass die gefundene Curve ein Maximum gebe, folgt aus dem zweiten Differenzial. Denn $x = 2c$ in U substituirt (da x als constant durch $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ unbewusst vorausgesetzt wird), giebt $U = y\,(2c - y)$; $dU = 2\,(c - y)\,dy$ (also $y = c$), $d^2U = -2dy^2$, ein Ausdruck, der unter allen Bedingungen negativ ist, also ein Maximum charakterisirt.

Die schöne geometrische Ausführung, dass die Lösung $x = 2y$ richtig und auch bekannten geometrischen Lehrsätzen entsprechend ist, verdient bei Stegmann nachgelesen zu werden. In der That wird für $x = 2y$ das Product $y\,(x - y) = y \cdot y = y^2$, ein Quadrat, und diess ist unter allen Rechtecken von gleichem Umfange dasjenige, das den grössten Inhalt hat.

Und dennoch ist die Lösung nur eine singuläre; denn wo ist im Problem die Bedingung gegeben, dass der Umfang $2\,(x - y) + 2y = 2x = 4y$ und das Product gleich y^2 sein müsse? Diess folgt allerdings unvermerkt aus $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, und diess aus $x = 2c$.

---

[1]) Strauch Variations-Calcul I. pag. 357.

[2]) Stegmann Variations-Rechnung §. 12.

Werden aber andere Bedingungs-Gleichungen genommen, so folgen andere Auflösungen. Wird z. B. $x + y = 2c$ als Bedingungs-Gleichung gesetzt (was die Gleichung der Linie bc ist), so folgt die Variations-Curve: $x = 3y$ (die Gerade Oc in Fig. V.).

Oder die Bedingungs-Gleichung: $x - \frac{4}{5}y = 2c$, (z. B. die Linie bh) giebt die Variations-Curve $5x = 6y$, die Gerade Oh. U. s. w.

Da jedoch in diesem Beispiele, wie es gestellt ist, aus $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ das Quadrat, aus den übrigen Gleichungen nur Rechtecke hervorgehen, so könnte es scheinen, dass $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ allein das wahre Maximum, und allein die wahre Variations-Curve gebe. Diess ist aber nur Schein. Denn wird das Rechteck durch xy ausgedrückt, wie man das Beispiel auch stellen kann, dann giebt nicht die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, sondern die aus der Bedingungs-Gleichung $x + y = 2c$ hervorgehende Variations-Gleichung $dU = (c - y)\,dy = 0$, das Quadrat als Resultat. Oder wird nach dem grössten Parallelopipedum von der Gleichung xy^2 gefragt, dann giebt nicht $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, sondern die aus der Bedingungs-Gleichung $x + 2y = 2c$ hervorgehende Gerade den Cubus als Resultat.

Man hat sich also das Problem $U = y\,(x - y)$ so vorzustellen, als ob gefragt würde, welches grösste Rechteck kann in Ellipsen oder Hyberbeln eingeschrieben werden? Unzählig viele, wird die Antwort sein, je nach Verschiedenheit des Verhältnisses der grossen und kleinen Axe der Ellipsen oder Hyberbeln. Sind die Axen einander gleich, dann entsteht das Quadrat als das grösste Rechteck; in den übrigen Fällen aber nicht, sondern es entstehen die den Axen $2a$ und $2b$ entsprechenden Rechtecke. Welches Resultat gefunden wird, das hängt einfach von den Bedingungs-Gleichungen ab.

§ 25.

Man kann das gegebene Beispiel noch von einer anderen Seite fassen. Bezeichnet v den Winkel, den in Fig. V. die Linien ba, bc, bg, bh.. mit OX machen, so ist, $Ob = 2c$ gesetzt, $y = w \sin v$; $x = 2c - w \cos v$ (wenn w die Abscissen für die Ordinate z in den Linien bc, bh etc. sind, und ihren Anfangspunkt in b haben).

Dann ist $z^2 = U = y(x-y) = 2cw \sin v - w^2 \sin v (\sin v + \cos v)$.

Nimmt man eine bestimmte Gerade, z. B. bc, dann ist v constant und es wird $2zdz = 2\{c \sin v - w \sin v (\sin v + \cos v)\} dw$, ein Ausdruck, der für ein Maximum Minimum gleich Null ist.

Daraus wird $w = \frac{c}{\sin v + \cos v}$.

Das zweite Differenzial von U ist unbedingt negativ; es tritt daher ein Maximum ein.

Setzt man $v = \frac{1}{2}\pi$, $\sin v = 1$, $\cos v = 0$, so wird $w = c$, $y = c$, $x = 2c$, also $x = 2y$, die Curve, die aus der Gleichung $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ folgt. Nimmt man aber beliebige andere Werthe von v, z. B. $v = \frac{1}{4}\pi$, $v = \frac{3}{4}\pi$ etc., so folgen andere Curven, als: $x = 3y$ etc. etc.

Ein schönes Variations-Problem entsteht noch, wenn man die Aufgabe stellt, die Curve zu finden, welche alle Maxima-Punkte: a, c, g, h.. (Fig. V.) verbindet. Diese Curve ist die Gerade: rh, deren Gleichung: $x - y = c$ ist, wie eine leichte Rechnung zeigt. (Man hat unzählig viele Auflösungen desselben Problems, so lange die Bedingungs-Gleichung nicht gegeben ist. In diesem Falle ist eine singuläre Auflösung jederzeit richtig, aber es ist ein Irrthum, wenn man sie für die einzig mögliche d. h. für allgemein nimmt.)

So lange die Bedingungs-Gleichungen nicht gegeben sind, ist jede Lösung gleich gültig; sollte aber etwa in einem gegebenen Integral-Ausdruck: $\int V dx$ die Bedingungs-Gleichung versteckt gegeben sein, dann kann allerdings eine beliebig gewählte Bedingung z. B. $x = c$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ mit der bereits im Probleme

$\int V dx$ enthaltenen Bedingung im Widerspruch stehen, und dann müssen die Schwierigkeiten auftauchen, mit denen der Variations-Calcul zu kämpfen hat.

§ 26.

Ueberblicken wir die gewonnenen Resultate, so erkennen wir drei verschiedene Variations-Elemente, deren Combinationen auch verschiedene Aufgaben hervorrufen. Es finden sich:

1) die Flächen-Gleichung, $f(x, y, z) = 0$, die auch die Function der unabhängig Veränderlichen heissen kann;

2) die Transversal-Curve (Bedingungs-Gleichung) $\psi(x, y) = 0$, für welche alle Werthe der zu findenden Variations-Curve absolute Maxima Minima von z sind;

3) die Variations-Curve, $\varphi(x, y) = 0$, die Hauptcurve oder Hauptfunction.

Von diesen drei Elementen können entweder je eines, oder je zwei, oder alle drei gegeben sein. — Ist bloss ein Element gegeben, dann ist das Problem unbestimmt z. B. $U = f(x, y)$, $z^3 = xy^2$ etc.; es giebt unzählig viele der Aufgabe entsprechende und genügende Auflösungen; und erst, wenn ein zweites Element, $\varphi(x, y) = 0$, oder $\psi(x, y) = 0$ hinzukommt, wird die Aufgabe bestimmt. — Sind aber alle drei Elemente gegeben, dann ist die Aufgabe überfüllt, gerade wie bei Gleichungen, in denen weniger unbekannte Grössen als Gleichungen gegeben sind. Das Problem kann in diesem Falle nur dann widerspruchslos sein, wenn eine der drei gegebenen Gleichungen ohnehin als Resultat der beiden anderen erscheint.

Der erste Fall, dass bloss ein Element gegeben ist, wobei das Problem unbestimmt, aber doch widerspruchslos bleibt, verursacht den bisherigen Variations-Theorieen einige Verlegenheit, und tritt bei ihnen da ein, wo integrable Differenzial-Ausdrücke gegeben sind, von denen man gleichwohl ohne weitere Bedingung Variations-Resultate verlangt.

Z. B. Es wird die Function $\varphi(x, y) = 0$ gesucht, für welche $U = \int (y dx + (x - 2y) dy)$ für alle Werthe von x und y Maxima sind. (Da $\int (y dx + (x - 2y) dy)$ für sich integrabel, näm-

lich gleich $y(x-y)$, ist, so ist U im Grunde dasselbe Problem, das § 24 analysirt wurde, es ist das Rechteck zwischen der Ordinate und der um die Ordinate verminderten Abscisse.

Da der gegebene Differenzial-Ausdruck für sich integrabel ist, so wird $U = y(x-y)$; es wird ein Integral gefunden, wo man eine Variations-Function suchte, und die Operation bleibt natürlich stille stehen, weil unzählige Lösungen möglich sind, und keine einzige verlangt ist. Stellt man sich aber selbst durch Einführung von Bedingungs-Gleichungen $\psi(x, y) = 0$, z. B. $x + \alpha y = h$, $y = c$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ etc., ein beliebig bestimmtes Problem, dann kann der Calcul eingreifen und das Problem zum Schlusse führen.

Warum die bisherige Theorie ein und dasselbe Problem, je nachdem es in bloss verschieden scheinenden Ausdrücken gegeben ist, (denn $U = y(x-y)$ und $U = \int (ydx + (x-2y)\, dy)$ sind in der That nicht verschieden), behandeln und wieder nicht behandeln kann, dafür findet sich kein Grund in den historisch vorliegenden Thatsachen.

§ 27.

Gehen wir zu dem einzig fruchtbaren Gebiete der bestimmten Probleme über, so sind folgende Combinationen möglich:

I. Gegeben sind: die Function der unabhängig Veränderlichen, und die Bedingungs-Gleichung; gesucht wird die Variations-Gleichung. Diess ist Gegenstand des Variations-Calculs im strengsten Sinne des Worts, und alle bisher behandelten Beispiele gehören in dieses Gebiet.

II. Gegeben sind: die Function der unabhängig Veränderlichen und die Variations-Gleichung; gesucht wird die Bedingungs-Gleichung — ein bisher noch nicht behandeltes Gebiet, es sei denn höchst speciell bei einigen Untersuchungen über die Grenzwerthe der Variationen, und auch da in anderem Sinne.

III. Gegeben sind die Variations-Gleichung und die Bedingungs-Gleichung; gesucht wird die ihnen entsprechende Function der unabhängig Veränderlichen — ein bisher noch nicht in Untersuchung gezogenes Gebiet.

Da es sich gegenwärtig um die Grundlegung, nicht aber um die vollständige Durchführung der Theorie des Variations-Calculs handelt, so können hier die Untersuchungen über II. und III. Gebiet höchstens berührt, nicht aber erschöpft werden, damit sich das sicher und fest gestellte Ziel nicht aus dem Auge verliere. In der Theorie selbst müssen diese Untersuchungen vollständig durchgeführt werden, um so mehr, als sie einiges Licht auf sehr dunkle Parthieen des Integral-Calculs werfen.

§ 28.

Um den Gang der Untersuchung II. anzudeuten, so ist gegeben: 1) $z = f(x, y)$, also auch $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, und 2) die Variations-Gleichung: $\varphi(x, y) = 0$.

Z. B. $z^3 = xy^2$, also auch: $3z^2dz = y^2dx + 2xydy$ und die Variations-Curve: $(y - x) = 0$. Aus letzterer bildet man durch Multiplication die Gleichung: $ydx - xdx = 0$, und sucht, welcher Werth dx statt dy substituirt werden muss, damit $ydx - xdx = 0$ mit $3z^2dz = y^2dx + 2xydy = 0$ übereinstimmt.

Wird die erstere Gleichung mit y multiplicirt, so wird $y^2dx - xydx = y^2dx + 2xydy$; demnach $-dx = 2dy$, uud durch Integration wird: $x + 2y - c = 0 = \psi$, die Bedingungs-Gleichung gefunden.

Es handelt sich also allgemein darum, aus der Variations-Gleichung $\varphi = 0$ z. B. $x - y = 0$ die Differenzial-Gleichung $\varphi dx = 0$ oder $\varphi dy = 0$ herzustellen und durch Multiplication von integrirenden Factoren so wie durch die Substitution: $dy = F(x, y, dx)$ die gegebene Variations-Curve $\varphi = 0$ auf den ebenfalls gegebenen Ausdruck: $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ zu bringen, Operationen, die bei den reichen Hilfsmitteln des Integral-Calculs jederzeit möglich sind.

Die Unterscheidung des Maximums vom Minimum durch d^2z wird dann nicht aus der gegebenen Variations-Gleichung, sondern aus der gefundenen Bedingungs-Gleichung hergeleitet, gerade wie im I. Gebiet dieselbe Unterscheidung nicht aus

der g e f u n d e n e n Variations-Gleichung, sondern aus der g e g e b e n e n Bedingungs-Gleichung hergeleitet wurde.

§ 29.

Bei den Problemen des III. Gebiets soll die Gleichung der unabhängig Veränderlichen: $z = f(x, y)$ aus $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ gefunden werden.

Aus $\varphi(x, y) = 0$ wird durch Multiplication von Factoren die Gleichung $M\varphi(x, y)\,dx = 0$ gefunden, die dann durch Substitution $dx = (\Phi(x, y))\,dy$, (ein Ausdruck, der aus $\psi(x, y) = 0$ hergeleitet wird,) in die Differenzial-Gleichung: $\Gamma(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy = 0$ umgewandelt werden muss.

$\Gamma(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$, $P(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$ gesetzt, geht die Differenzial-Gleichung der Function z hervor: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, deren Integration die gesuchte Function der unabhängig Veränderlichen giebt.

B e i s p i e l zur Erläuterung. Gegeben seien: $\varphi = y - x = 0$; $\psi = x + 2y - c = 0$; gesucht wird: $F(z) = f(x, y)$. Aus $\varphi = 0$ wird $M\varphi dx = 0$, hier $y^2 dx - xydx = 0$ hergestellt; aus $d\psi$ folgt $dx = -2dy$. Diess in $-xydy$ substituirt, giebt: $y^2 dx + 2xydy = dz$, deren Integral $xy^2 = z$ (oder allgemein $= F(z)$) die gesuchte Gleichung der unabhängig Veränderlichen ist.

Natürlich findet man hier, wie bei jeder Integration, Gleichungen z, die a l l g e m e i n e r sind, als die etwa in einem besonderen Beispiele vorausgesetzten. Diess erläutert auch der Integral-Calcul.

§ 30.

Wenn in den gewöhnlichen Variations-Theorieen hieher gehörige Beispiele nur mit singulärer Lösung angetroffen werden, so ist nun im Vorausgehenden ein ungezählter Reichthum von Problemen und Lösungs-Methoden aufgeschlossen und bewiesen. Von hier aus schreiten wir auch zu den Variationen der einfachen Integral-Ausdrücke von der Form: $\int V dx$, in denen V eine Function von $(x, y, dx, dy, d^2y\,..)$ ist, Untersuchungen, mit denen wir

das reichste und ausgezeichnetste Gebiet des Variations-Calculs betreten. Zwar scheint der natürliche Gang zu verlangen, dass zuerst Ausdrücke von der Form: $z = f(x, y, dx, dy, d^2y \ldots)$ untersucht werden, weil in ihnen neben den unabhängig Veränderlichen wohl ihre Differenzialien, aber noch kein Integral-Ausdruck enthalten ist. Aus Gründen jedoch, die später entwickelt werden, stellen wir die Untersuchungen über den Ausdruck: $\int V dx$ voran, wie denn auch Probleme dieser Form historisch das erste und lange Zeit das einzige Gebiet des Variations-Calculs waren, so dass noch Euler die Möglichkeit, Ausdrücke von der Form mit blossen Differenzialien: $z = f(x, y, dx, dy, d^2y \ldots)$ als Variations-Probleme zu behandeln, aus sehr triftigen und bisher noch nicht widerlegten Gründen bestreiten konnte.

III.

Variation der Integral-Ausdrücke von der Form: $z = \int V dx$, worin V als Function von $(x, y, p, q\,..)$ gegeben ist.

---

§. 31.

Die Probleme dieses Gebiets erscheinen in so einfacher Gestalt, dass sie fast unangreifbar sind, wie sie denn auch lange Zeit hindurch alle Bemühungen der Wissenschaft illusorisch gemacht haben.

Im Ausdrucke: $z = \int V dx$ ist weder die Function der unabhängig Veränderlichen: $z = f(x, y)$, noch die Variations- noch auch die Bedingungs-Gleichung gegeben, wohl aber von jeder so viel, dass die Probleme ihrer Natur nach bestimmt sind. Denn $z = f(x, y)$ ist im Problem: $z = \int V dx$ als zu findendes Integral vorhanden, und auch die Variations-Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ ist in so weit gegeben, dass in $V dx$ das Differenzial dy durch dx ausgedrückt erscheint.

Da nämlich in $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ getrennte Ausdrücke mit den Factoren dx und dy sind, während in $V dx$ der einzige Factor dx vorkommt, so muss aus $d(\varphi(x, y)) = 0$ bereits dy in dz substituirt sein, wenn das Problem als Variations-Problem gelten soll. — Endlich die Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y) = 0$ ist in so weit angedeutet, dass die Substitution $\psi(x, y) = 0$ in z das Differenzial dz gleich Null macht.

Wie soll man nun die Aufgabe anfassen, wenn man nur im Allgemeinen weiss, dass von jeder der drei Gleichungen etwas gegeben ist, nicht aber was gegeben ist, noch auch wie das Gegebene zur Auffindung des Gesuchten zu verwerthen ist.

§ 32.

Die berühmteste und unzähligemal behandelte Aufgabe dieser Art, die Auffindung der Brachystochrone, ist so allgemein bekannt, dass wir uns in ihr orientiren, und vielleicht den Weg zur allgemeinen Auflösung finden werden.

Der analytische Ausdruck des Problems ist: $z = \int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}} dx$, und es soll die Function: $\varphi(x, y) = 0$ gefunden werden, die z für alle Werthe von x und y zu einem Maximum Minimum macht. Worin besteht nun die Auflösung?

Wenn V allgemein gleich $f(x, y, p, q\ldots)$ ist, so ist hier $V = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$. Indem man V differenzirt, erhält man

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \ldots,$$

und wenn man daraus die Gleichung: $\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\ldots\right) = 0$ bildet, so giebt die Auflösung dieser Gleichung die gesuchte Variation $\varphi(x, y) = 0$.

Im gegebenen Beispiele ist $V = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$, demnach: $M = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}}$, $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}$, $Q = 0$, also $N - \frac{dP}{dx} + \ldots = 0$; $-d\left(\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$. Daraus folgt $\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, woraus $p^2a = x(1+p^2)$, $p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$; $dy = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx$ folgt, eine Gleichung, die integrirt, die Cycloide giebt, wie allgemein bekannt ist.

Diess ist das eben so schöne als allgemein anwendbare Verfahren bei Behandlung dieser Probleme, das vom Anfange an eingehalten wurde, und das Euler im Jahre 1744 in seiner ganzen Allgemeinheit bekannt gemacht hat.

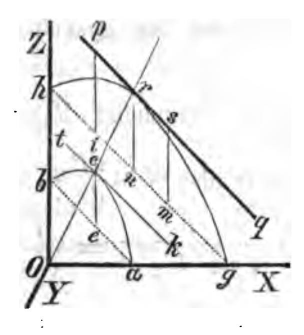
Aus vielen Umständen weiss man, dass an der Richtigkeit der durch dieses Verfahren gewonnenen Resultate nicht gezweifelt werden könne; aber den genuinen Grund, warum man gerade so zu verfahren habe, um adäquate Resultate zu erhalten, weiss man nicht, wie ein ganz aufrichtiges und fast göttliches Bekenntniss eingestehen würde.

Diess kann man aber der menschlichen Vernunft nicht zumuthen, da einstweilen Scheingründe bestehen, die dann später ohnehin vor dem Lichte der objectiven Wahrheit verschwinden. —

§ 33.

Suchen wir den rechten Standpunkt zu gewinnen, um das Problem vorerst nur angreifen zu können, so ist in $z = \int V dx$ auch $dz = V dx$ gegeben, d. h. das Differenzial der Ordinate z für die Variations-Curve: $\varphi(x, y) = 0$. Denn z ist der Ausdruck, der für die Substitution der Variations-Curve eintritt, da z für alle Werthe (x, y) ein Maximum oder Minimum sein soll, eine Forderung, die nur durch die Variations-Curve erfüllt werden kann. Dieser Punkt ist vollkommen klar und bestimmt.

Fig. VI.



Ist in *Fig. VI.* die Linie *Or* der Durchschnitt der Variations-Curve und der Fläche, so ist für c (der Punkt (x, y, z)) das Differenzial dz gleich der Linie rn. Dass dieser Ausdruck nicht Null sein kann, ist einleuchtend; denn dz ist nicht für die Variations-Curve Ocr, sondern für die Bedingungs-Gleichung bca gleich Null, wie im Abschnitt II. bewiesen wurde.

Für die Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y) = 0$ gilt:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy}\right) dy = 0.$$

Wird aus $\psi(x, y) = 0$ der Factor $\frac{dx}{dy} = -F$ substituirt, so wird $\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$

Wird diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ combinirt, so kann entweder $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder $\frac{\partial z}{\partial y}$ eliminirt werden. (Gewöhnlich wird $\frac{\partial z}{\partial x}$ eliminirt, weil in $V = f(x, y, p, q \ldots)$ die Grösse y als die abhängige Variable gegeben ist.)

Wird $\frac{\partial z}{\partial x}$ eliminirt, so folgt: $dz = \left(\frac{1}{F} + \frac{dy}{dx}\right) \frac{\partial z}{\partial y} dx$. (Z. B. für die Normal-Schnitte als Bedingungs-Gleichung wird $F = \frac{dy}{dx}$, demnach $dz = \left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dx}\right) \frac{\partial z}{\partial y} dx$, wie im II. Abschnitt bewiesen wurde. Würde $\frac{\partial z}{\partial y}$ eliminirt, so folgte: $dz = \left(\frac{dx}{dy} + F\right) \frac{\partial z}{\partial x} dy = \left(1 + \frac{Fdy}{dx}\right) \frac{\partial z}{\partial y} dx$.

Dadurch ist die Form hergestellt, in welcher der Ausdruck: $dz = Vdx$ gegeben ist, und V ist: $\left(\frac{1}{F} + \frac{dx}{dy}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$, oder: $\left(1 + \frac{Fdy}{dx}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$.

Es handelt sich nun darum, das partielle Differenzial $\frac{\partial z}{dy}$ (oder $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ zu finden. Diess wäre sehr leicht, wenn $z = f(x, y)$ gegeben wäre, was aber nicht der Fall ist, wofür jedoch das totale Differenzial dz in Beziehung auf die Variations-Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegeben ist.

§ 34.

Um zum Ziele zu gelangen, nehmen wir den im Differenzial-Calcul streng bewiesenen Lehrsatz, dass es einerlei ist, ob eine Function zuerst total und dann partiell, oder zuerst partiell und dann total differenzirt wird.

Nun ist das totale Differenzial dz gegeben, und das partielle Differenzial von dz nach y, $\left(\frac{\partial\,(dz)}{y}\right)$, wird hergestellt, wenn im Ausdruck dz die Grösse y und alle Functionen von y, also $p, q, r \ldots$ differenzirt, hingegen x und alle Functionen von x als constant behandelt werden.

Daraus wird: $\underset{y}{\partial}\,(dz) = (N\partial y + P\partial p + Q\partial q \ldots)\, dx$.

Nach dem Lehrsatze des Differenzial-Calculs ist aber $\frac{\partial}{y}\left(dz\right) = d\left(\frac{\partial z}{y}\right)$; demnach auch:

$$d\left(\frac{\partial z}{y}\right) = (N\partial y + P\partial p + Q\partial q + \ldots)\, dx,$$

und weil total differenzirt ist, kann auch total integrirt werden:

$$\frac{\partial z}{y} + Cdx = \int (N\partial y + P\partial p + Q\partial q + \ldots)\, dx, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{Cdx}{\partial y} = \frac{1}{\partial y}\int (N\partial y + P\partial p + Q\partial q + \ldots)\, dx.$$

Wird aus $V = \left(\frac{1}{F} + \frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$ der Factor $\frac{\partial z}{\partial y}$ substituirt, so folgt:

$$\frac{V}{\left(\frac{1}{F} + \frac{dy}{dx}\right)} + \frac{Cdx}{\partial y} = \frac{1}{\partial y}\int (N\partial y + P\partial p + Q\partial q + \ldots)\, dx),$$

ein endlicher Ausdruck, der in keiner Weise gleich Null ist.

Es ist demnach $\int (N\partial y + P\partial p + Q\partial q \ldots)\, dx = \frac{V\partial y}{\left(\frac{1}{F} + \frac{dy}{dx}\right)} + Cdx$,

woraus die unbedingte Möglichkeit der Integration des Ausdrucks: $\int (N\partial y + P\partial p + Q\partial q \ldots)\, dx$ folgt, da ihr Resultat bereits rechts des Gleichheits-Zeichens gegeben ist.

Die ganze Frage ist demnach auf die Bedingungen der Integrabilität der obenstehenden Gleichung zurückgeführt.

§ 35.

Da total integrirt wird, so muss man die partiellen Differenzial-Zeichen ∂ in $\partial p = \partial\frac{dy}{dx}$, $\partial q = \partial\frac{d^2y}{dx^2}$, $\partial r = \partial\frac{d^3y}{dx^3}$, ... auf die letzte Stelle zu bringen suchen, damit so viel als möglich Integrationen ausgeführt werden können. Nach dem oben angeführten Differenzial-Lehrsatz ist nach Ausscheidung der constanten Factoren dx, der Ausdruck: $\partial p = \partial\frac{dy}{dx} = \frac{d\partial y}{dx}$; ebenso $\partial q = \partial\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\partial y}{dx^2}$; $\partial r = \frac{d^3\partial y}{dx^3}$, u. s. w., demnach:

$$\int P\partial p = \int \frac{P}{dx} d\partial y = \frac{P}{dx}\partial y - \int \partial y \frac{dP}{dx};$$

$$\int Q\partial q = \int \frac{Q}{dx^2} d^2\partial y = -\frac{dQ}{dx^2}\partial y + \frac{Q}{dx^2} d\partial y + \int \partial y \frac{d^2Q}{dx^2};$$

$$\int Rdr = \int \frac{R}{dx^3} d^3\partial y =$$

$$= \frac{d^2R}{dx^3}\partial y - \frac{dR}{dx^3} d\partial y + \frac{R}{dx^3} d^2\partial y - \int \partial y \frac{d^3R}{dx^3}.$$

U. s. w.

Es wird demnach: $\int (N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + ..) dx =$

$$\left(\frac{P}{dx} - \frac{dQ}{dx^2} + \frac{d^2R}{dx^3} - ..\right)\partial y dx +$$

$$+ \left(\frac{Q}{dx^2} - \frac{dR}{dx^3} + ..\right) d\partial y dx + \left(\frac{R}{dx^3} + ..\right) d^2\partial y dx + .. +$$

$$+ \int \left(\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^3R}{dx^3} + ..\right)\partial y dx\right).$$

Zusatz. Die Zeichen ∂y und dy könnten auch unbedingt miteinander vertauscht werden; denn y partiell nach y differenzirt, ist gerade so viel, als y total nach y differenzirt, wie aus dem Differenzial-Calcul allgemein bekannt ist. Ohnehin deutet in $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ das Zeichen ∂y nur an, dass z nach y differenzirt wird, und es wird nur der Gleichförmigkeit mit ∂z willen ∂y statt dy gesetzt. Es ist zwar $\underset{y}{\partial z}$ sehr verschieden von dz, nicht aber $\underset{z}{\partial z}$ von dz, noch auch $\underset{y}{dy}$ von dy. Darum hätten wir auch sogleich statt ∂p setzen können dp, ebenso dq statt ∂q, etc., und die Integration hätte sogleich stattfinden können, woraus dasselbe Resultat hervorgegangen wäre. Diese Reductionen werden auch nicht vorgenommen, damit ∂y, ∂p etc., von der partiellen Differenziation frei werden, sondern desshalb, damit *alle* Glieder hinter dem Integral-Zeichen den *nämlichen* Factor $\partial y dx$ erhalten, wodurch die Prüfung der Integrabilität des Ausdrucks:

$$\int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + ..\right)\partial y dx$$

erleichtert wird.

§ 36.

Wird eine Function $z = f(x, y)$ (in welcher durch die Variations-Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ bereits y als von x abhängig gesetzt ist) einmal total und einmal partiell nach y differenzirt, so entstehen im Allgemeinen drei Glieder dieses zweiten Differenzials, deren eines $dx\,dy$, das andere dy^2, und das dritte d^2y als Factor enthält, (ein Satz, der aus dem Differenzial-Calcul allgemein bekannt ist). Denn durch das totale Differenziren entstehen zwei Glieder $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, und durch das partielle Differenziren dieses Ausdrucks nach y folgt $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y$. Ebenso, wenn zuerst partiell, und dann total differenzirt wird, im ersten Differenzial: $\underset{y}{\partial}(z) = \frac{\partial z}{\partial y} dy$, woraus durch totale Differenzirung die Gleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{dy^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y$ hervorgeht. (Der Ausdruck $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$ kann singulär fehlen, wenn in $z = f(x, y)$ die Grösse y nur in der ersten Potenz enthalten ist.)

Begegnet man daher einer solchen Differenzial-Gleichung, die nicht die drei Glieder, oder nicht wenigstens die zwei Glieder $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial z}{\partial x} d^2y$ enthält, so muss geschlossen werden, dass von ihr aus nicht auf ein erstes Differenzial durch Integration zurückgegangen werden kann. So wenig, als ein erstes Differenzial von der Form $dz = f(x, y)\,dx$, z. B. $dz = xy\,dx$ integrirt werden kann, eben so wenig kann ein zweites Differenzial von der Form: $K dx\,dy$ integrirt werden, wie aus dem Integral-Calcul bekannt ist. Wohl aber haben Ausdrücke von der Form: $K dx\,dy + L dy^2 + M d^2y$ die Möglichkeit der Integration, selbst wenn $L = 0$ ist.

Nun ist $\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right) dx\,\partial y$ ein solcher, aus partieller und totaler Differenzirung hervorgegangener Ausdruck, der demnach nicht integrabel ist.

Dieser Ausdruck ist aber in der vorstehenden Formel wirklich integrirt, denn es ist $\int\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-..\right)dx\,\partial y=$

$$=\frac{V\partial y}{\frac{1}{F}+\frac{dy}{dx}}+Cdx-\left(\frac{P}{dx}-\frac{dQ}{dx^2}+\frac{d^2R}{dx^2}-..\right)\partial y dx-\left(\frac{Q}{dx^2}-..\right)d\partial y dx-..,$$

so dass rechts des Gleichheits-Zeichens das Integral des untersuchten Ausdrucks gegeben ist. Daraus folgt, dass $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-..$ gleich Null sein muss; denn welche Grösse sonst hinter dem Integral-Zeichen stünde, das Integral $\int\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-..\right)dx\,\partial y$ würde nie möglich sein, während wir doch andrerseits wissen, dass es nicht bloss möglich, sondern auch wirklich ist, ja dass wir es sogar vor Augen haben.

§ 37.

Die aus der bisherigen Entwicklung hervorgehenden Resultate sind:

1) Es folgen für die Variations-Gleichung die beiden gleich wichtigen Gleichungen, die sich auch gegenseitig controliren:

$$\text{I.}\quad N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^2}+..=0 \text{ und}$$

$$\frac{Vdy}{\frac{1}{F}+\frac{dy}{dx}}+Cdx=\left(P-\frac{dQ}{dx}+..\right)dy+\left(\frac{Q}{dx}-\frac{dR}{dx^2}\right)d^2y+\left(\frac{R}{dx^2}-..\right)d^3y+..$$

(oder überall $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{d^2y}{dx^2}$, $r=\frac{d^3y}{dx^3}$ .. substituirt).

$$\text{II.}\quad V+\frac{C}{p}\left(\frac{1}{F}+p\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{F}+p\right)\left(\left(P-\frac{dQ}{dx}+..\right)+\left(Q-\frac{dR}{dx}+..\right)\frac{q}{p}+\left(R+..\right)\frac{r}{p}+..\right).$$

Aus beiden Gleichungen, sowohl aus I als aus II, kann die gesuchte Variation $\varphi(x, y)=0$ gefunden werden; aus I unbedingt, und aus II dann, wenn man den aus der Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y)=0$ folgenden Werth F kennt.

2) Aus Gleichung II. wird die Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y) = 0$ gefunden, indem man das in Gleichung I. erhaltene Resultat in Gleichung II. substituirt, und durch Auflösung der Gleichung die Grösse F, und aus ihr die unbekannte Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y) = 0$ herstellt, was immer möglich ist, da $F = -\frac{dx}{dy}$ substituirt werden kann.

3) Sind Variations- und Bedingungs-Gleichung gefunden, so geht man zur Entscheidung über, ob die Variation $\varphi(x, y) = 0$ Maxima oder Minima giebt. Man substituirt in dz die aus der Bedingungs-Gleichung $\psi(x, y) = 0$ hervorgehenden Werthe, weil nur für diese dz gleich Null wird, und differenzirt noch einmal. Der positive oder negative Werth des zweiten Differenzials entscheidet, ob Minimum oder Maximum stattfindet. — (Würde man hingegen statt der Bedingungs-Gleichung die Variations-Gleichung in $dz = Vdx$ substituiren, so erhielte man weder $dz = 0$, noch die entsprechenden Werthe im zweiten Differenziale, da für die Variations-Gleichung nur relative, hingegen für die Bedingungs-Gleichung absolute Maxima und Minima eintreten.)

4) Will man die Function der unabhängig Veränderlichen $z = f(x, y)$ herstellen, so hat man zuerst die partielle Differenzial-Gleichung $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{F\partial z}{\partial x} = 0$ zu integriren, woraus z als eine beliebige Function von $f(x, y)$ hervorgeht, und hierauf werden zur Bestimmung dieser Function $V = \left(\frac{1}{F} + \frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$, $V = \left(1 + \frac{Fdy}{dx}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$ integrirt, woraus die Function $z = f(x, y)$ folgt.

5) Substituirt man aus der Variations-Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ die Werthe x oder y in die gegebene Gleichung $z = \int Vdx$, und integrirt dann, so erhält man z als Function von x oder von y, je nachdem x oder y substituirt wird.

Geometrisch interpretirt giebt diess die Projectionen der räumlichen Variations-Curve auf die Ebenen ZX, ZY, während die unmittelbar gefundene Variations-Gleichung $\varphi(x, y) = 0$

die Projection auf die Ebene XY giebt, wodurch bei geometrischen Problemen die letzte Bestimmtheit und Anschaulichkeit erreicht wird.

Zusatz. Alle diese Elemente sind vollkommen bestimmt, soweit Probleme, bei denen durch Integration willkürliche Constanten eintreten, vollkommen bestimmt genannt werden können. In der That ist auch ersichtlich, dass z. B. die durch Integration gefundene Fläche $z = f(x, y)$ nicht die einzige Fläche ist, die den beiden Curven $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ entspricht, indem z. B. z^2, z^3 und überhaupt z^n statt z gesetzt den Bedingungen, dass $\underset{\varphi}{z}$ eine Variation, und $\underset{\psi}{dz} = 0$ werde, ebenfalls entsprechen. Jede allgemeine Auflösung hat diese Eigenschaft, die aus der Natur sowohl des Calculs als des Problems hervorgeht, und bei wirklich vorkommenden Problemen noch Platz lässt, dass zur letzten Singularisirung anderwärts gegebene, oder willkürlich gewählte Bedingungen aufgenommen werden, was ein Vorzug des wahrhaft allgemeinen Calculs ist.

§ 38.

Es ist nicht nothwendig, dass man bei der Prüfung der Integrabilität von $\frac{\partial z}{\partial y}$ bei dem Integral:

$$(1) \qquad (W) = \int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right) dy dx$$

stehen bleibt; denn man kann die Gleichung (W) noch auf doppelte Art integriren, woraus andere, aber wesentlich übereinstimmende Criterien der Integrabilität der gegebenen Gleichung hervorgehen, die dann auch andere Variations-Gleichungen bestimmen.

Es ist nämlich auch:

$$(2) \quad (W) = y\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right) dx - \\ - \int \left(y \left(\frac{dN}{dx} - \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^3Q}{dx^3} - \frac{d^4R}{dx^4} + \ldots\right) dx^2 \right); \text{ und}$$

$$(3)\quad (W) = dy\left(\int N dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \ldots\right) -$$
$$- \int\left(\int N dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \ldots\right) d^2y,$$

je nachdem man in $W = \int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right) dydx$ den Factor dy, oder den Factor $\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right) dx$ durch Integration ausscheidet.

Aus den nämlichen Gründen, die § 36 ausgeführt sind, müssen die beiden Gleichungen:

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^3Q}{dx^3} - \frac{d^4R}{dx^4} + \ldots,$$
$$\int N dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \ldots$$

gleich Null sein, Gleichungen, die insbesondere da von Wichtigkeit werden, wenn entweder Vdx bloss x, y, dx enthält, oder wenn sich Schwierigkeiten und scheinbare Widersprüche in der Hauptformel $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$ finden, von denen wir noch besonders handeln werden.

Sämmtliche drei Auflösungen (1), (2), (3) genügen vollkommen dem Probleme im Allgemeinen; im Besonderen aber hängt es von den anderwärts gegebenen Bedingungen des Problems ab, welche der drei Gleichungen gewählt wird. Die Gleichung (2) giebt eine Constante mehr als (1), und Gleichung (3) eine Constante weniger als Gleichung (1). Es kann daher jedes Problem selbst dreifach verändert werden, und jede der drei Auflösungen entspricht vollkommen der Natur der Aufgabe, wenn die Anzahl der Constanten nicht anderwärts gegeben ist.

§ 39.

Kehren wir zur ersten Formel zurück:

$$V + \frac{C}{p}\left(\frac{1}{F} + p\right) = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\left(P - \frac{dQ}{dx} + \ldots\right) + \left(Q - \ldots\right)\frac{q}{p} + \ldots\right),$$

so enthält sie in Beziehung auf F überhaupt drei verschiedene Fälle:

1) $F = 0$; dann wird $\frac{1}{F} + p = \infty$, und die weitere Untersuchung ist nach dieser Formel nicht fortzuführen. Ist aber $F = 0$, so ist in der Gleichung $F = -\frac{dx}{dy}$, offenbar $dx = 0$, $x = c$. Tritt diess ein, dann ist von selbst $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, wie im Abschnitt II. bewiesen wurde. — Diess ist der gewöhnlich und fast einzig beachtete Fall der bisherigen Theorieen, und die Bedingungs-Gleichung ist: $\psi(x - c) = 0$, geometrisch eine mit der Axe Y parallele gerade Linie.

2) $F = \infty$. Daraus folgt $\partial y = 0$, $(y - c) = 0$, wie im Vorhergehenden erläutert wurde. Die Bedingungs-Gleichung ist geometrisch eine mit der Axe X parallele Linie, eine bisher unbeachtet gebliebene Bedingungs-Gleichuug.

3) $P = \pm$, d. h. irgend eine endliche Function von $(x, y, p, q \ldots)$, wenn z. B. Normalen oder irgend andere Linien und Curven Bedingungs-Gleichungen sind.

Zusatz. In zwei Fällen kann man die Bedingungs-Gleichungen unmittelbar und a priori bestimmen.

a) Enthält im Ausdrucke $z = \int V dx$ die Grösse V bloss x und y, so wird $\frac{\partial z}{\partial y}$ unmittelbar gleich Null. Daraus folgt aber $dx = 0$, $x = c$ als Bedingungs-Gleichung.

b) Enthält V kein x, sondern bloss $(y, p, q \ldots)$, so stimmt das partielle Differenzial in Vdx mit dem totalen überein, da man durch beide Operationen dasselbe Resultat erhält.

Daraus folgt durch Integration:

$$V + C = p\left(P - \frac{dQ}{dx} + \ldots\right) + q\left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right) + \ldots$$

Vergleicht man diess mit § 37, Formel II, so folgt:

$$\frac{1}{F} + p = p,\ \frac{1}{F} = 0,\ -\frac{dy}{dx} = 0,\ \text{also } y = c$$

als Bedingungs-Gleichung.

Die bisherigen Theorieen hatten, da sie aus $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ nur die Bedingungs-Gleichung $x = c$ unbewusst setzten, in den Differenzial-Operationen nur x als constant gelten lassen, nicht aber auch y, was doch aus den Bedingungs-Gleichungen $dy = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ unbedingt folgt.

Und dennoch nehmen alle Theorieen nach Euler's Vorgange [1]) keinen Anstand, in diesem Falle die Variations-Curve aus Gleichung II. (also mit unbewusst gesetzter Bedingungs-Gleichung $\psi(y - c) = 0$) statt aus Gleichung I. zu bestimmen, weil dadurch eine Integration wegfällt, und die Operation kürzer wird; auch setzen sie in der Gleichung:

$$V + C = p\left(P + \frac{dQ}{dx} + ..\right) + q\left(Q + ..\right) + ..$$

die Grösse V keineswegs gleich Null, was sie auch nicht ist, obgleich sie in verschiedenen Theorieen als Null genommen wird.

Uebrigens können in allen Fällen (den einzigen bereits behandelten Fall: $F = 0$ ausgenommen) die Bedingungs-Gleichungen aus:

$$V + \frac{C}{p}\left(\frac{1}{F} + p\right) = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\left(P - \frac{dQ}{dx} + ..\right) + \left(Q - ..\right)\frac{q}{p} + ..\right)$$

bestimmt werden. Sie werden verschieden, je nachdem man willkürliche Constanten nimmt oder weglässt, und je nachdem man eine der drei Gleichungen des § 38 wählt, wie ja auch in Problemen des vorhergehenden Abschnittes II. nachgewiesen wurde, dass verschiedene Bedingungs-Gleichungen; z. B. gerade Linien, Kreise, Parabeln etc., einer und derselben oder verschiedenen Variations-Gleichungen entsprechen können.

§ 40.

Zur Bestimmung der Flächen-Gleichung hat man folgende Elemente.

---

1) Euleri meth. inven. etc. § 30, Scholion I; §§ 46, 47 Coroll. V, VI; § 66 Casus IV. etc. etc.

1) Die Integration der Gleichung: $\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ giebt eine Function zwischen x und y als Function von z, $f(x, y) = \psi z$, worin jede Function von z genügt, welche dz positiv lässt, wenn, wie es gewöhnlich der Fall ist, Vdx mit positivem Zeichen gegeben ist.

2) Die Gleichung: $V = \left(\frac{1}{F} + \right)\frac{\partial z}{dy}$ giebt integrirt: $z = \chi(x,y) + fx$, worin $\chi(x, y)$ eine bestimmte Function von x und y ausdrückt, während fx eine ganz willkürliche Function von φ ist.

3) Da nun $\frac{\partial z}{\partial y}$ bekannt ist, so giebt die Gleichung $\left(\frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{F}\frac{\partial z}{\partial y}$ integrirt: $z = \psi(x, y) + \varphi y$, worin wieder $\psi(x, y)$ eine bestimmte Function von x und y, und φy eine ganz willkürliche Function von y ausdrückt.

Da für die Variations-Curve: $Vdx = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ ist, so giebt die Substitution der Werthe $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Mittel an die Hand, die willkürlichen Functionen fx und φy zu bestimmen, wodurch die Flächen-Gleichung in ihrer ganzen Allgemeinheit und Bestimmtheit gefunden wird.

§ 41.

Die Entscheidung, ob die gefundene Variations-Gleichung ein Maximum oder Minimum giebt, zählt zu den schwersten Problemen der Analysis.

In vielen Fällen weiss man aus der Natur der Aufgabe, ob ein Maximum oder Minimum eintritt, z. B. bei der Linie des schnellsten Falles; allein dieses Wissen ist nicht auf den Calcul gegründet, und darum auch für den Calcul werthlos.

Euler gebraucht die Methode, dass er statt der gefundenen Variations-Curve irgend eine andere Curve, z. B. eine gerade Linie, in den Ausdruck $\int Vdx$ substituirt, woraus sich ergiebt, ob die Integration für die Variations-Curve oder für die sub-

stituirte Curve einen grösseren oder kleineren Werth hat. Diese ganz empirische Methode Euler's ist wegen ihres wissenschaftlichen Unwerthes allgemein aufgegeben worden. Es ist nicht jederzeit leicht, das Integrale: $\int V dx$ herzustellen; und überhaupt, wenn man statt der Variations-Curve eine andere Curve substituirt, so weiss man nicht gewiss, ob denn auch für jede andere Curve dasselbe Resultat erfolgen werde. Und alle Curven zu erproben, ist denn doch unmöglich. Endlich kann die Variations-Curve ein Maximum oder Minimum geben, je nachdem in ihr die Variable x grösser oder kleiner als die Constante a genommen wird, und diesen Werth $x = a$ kennt man nicht, ehe nicht aus dem Calcul selbst über Maximum oder Minimum entchieden ist, so dass der Versuch, die Schwierigkeit durch empirisches Verfahren zu umgehen, schlechterdings zu keinem sicheren Resultate führen kann.

Lagrange war es, der die Schwierigkeit direct durch den Calcul anzugreifen wagte, wozu sich weder Newton und Leibniz, noch Bernoulli und Euler entschliessen wollten; und von kleinen Anfängen sind durch die Bemühungen tiefsinniger Mathematiker die Criterien über Maximum und Minimum der Variations-Resultate zu umfangreichen Formeln, Lehrsätzen und Betrachtungen angewachsen.

Allein da die Variationen mit dem Symbole δ bodenlos sind, und als Phantasie-Gebilde einen exacten Ausdruck weder bisher gegeben haben, noch auch jemals geben können, so bleibt es nach unglaublich weitläufigem Calcul für jeden Forscher unmöglich, definitiv zu entscheiden, ob im gegebenen Falle ein Maximum oder ein Minimum gefunden ist, weil keine objectiven und im Calcul gegründeten Entscheidungsgründe vorliegen.

Der gerade Weg, zu dieser Entscheidung zu gelangen, ist, dass man die Flächen-Gleichung herstellt, und in sie nicht die Variations-Curve, sondern die Bedingungs-Gleichung substituirt, wonach die Entscheidung über Maximum oder Minimum ganz einfach den bekannten und objectiven Gesetzen des Differenzial-Calculs gemäss ohne alle Schwierigkeit erfolgt. In so ferne kann diese Frage erledigt scheinen.

Allein die Herstellung der Flächen-Gleichung in geschlossenem Ausdruck ist in vielen Fällen bis jetzt nicht ausführbar, weil der Integral-Calcul, der diess zu leisten hat, noch nicht alle seine reichen Hülfsmittel entfaltet hat. Die Entscheidung über Maximum und Minimum der Variations-Resultate auf Herstellung der Flächen-Gleichung gründen wollen, hiesse daher in vielen Fällen die Schwierigkeit auf unbestimmte Zeit verschieben, statt sie zu lösen. Es muss daher entweder ein anderes, auf den gegebenen Ausdruck Vdx gegründetes und in Differenzial-Operationen ausführbares Verfahren gefunden werden, oder wenn diess nicht geschehen könnte, so müsste diese Frage ausdrücklich als unerledigt anerkannt werden; denn eine Entschuldigung oder Umgehung auf die eine oder andere Art würde weder der Wissenschaft noch der Erkenntniss zum Nutzen gereichen können.

§ 42.

Das Gesetz der Entscheidung über Maximum und Minimum, das wir suchen, muss in den vorhergehenden Formeln enthalten sein. Wir stellen zuerst folgenden Lehrsatz auf:

Wenn der Ausdruck: $\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-..\right)$ mit L, der Ausdruck: $\left(\left(\frac{C}{p}+P-\frac{dQ}{dx}+..\right)+\left(Q-\frac{dR}{dx}+..\right)\frac{q}{p}+..\right)$ mit K bezeichnet wird, so ist (§ 35)

$$Vdx=\left(\frac{1}{F}+p\right)\frac{1}{p}\left(\int\left(L\,dx\,dy\right)+\left(\frac{1}{F}+p\right)Kdx.\right.$$

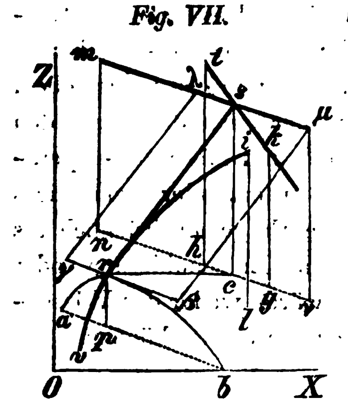
Diese Gleichung behält ganz denselben Werth, wenn die aus der Bedingungs-Gleichung hervorgehenden Werthe dx, dy in sie substituirt werden.

Beweis. a) analytisch. Streng genommen enthält diese Gleichung bereits die aus der Bedingungs-Gleichung hervorgehenden Werthe dx, dy; denn sie ist aus $Vdx=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ (Variations-Gleichung) und $dz=\frac{\partial z}{\partial y}-F\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (Bedingungs-Gleichung) abgeleitet, so dass die Werthe $F=-\frac{dx}{dy}$, also die aus

der Bedingungs-Gleichung hervorgehenden Werthe dx, dy, in ihr enthalten sind.

b) geometrisch. Ist in *Fig. VII.* die Linie vri die in der Fläche liegende Variations-Curve, rs ihre Tangente, die Ebene $\beta\gamma\lambda\mu$ die tangirende Ebene der Fläche im Punkte r (x, y, z), ab die Bedingungs-Gleichung in der Ebene XY (z. B. die Normale), so ist die Tangente der Transversal-Curve arb im Punkte r parallel mit ab, also $\gamma\beta \mp ab$, weil $rp = z$ ein absolutes Maximum Minimum der Transversal-Curve arb ist. Für $rc = dx$, und $rc \mp XY$ ist $sc = dz = Vdx$. Ist $m\mu \mp n\nu \mp ab$ (eine Folge der Substitution der Werthe dx, dy, aus der Bedingungs-Gleichung), so sind

Fig. VII.



sämmtliche dz, die zwischen den Parallelen $m\mu$ und $n\nu$ enthalten sind, also mn, sc, $\mu\nu$ .. einander gleich, weil sie Parallelen zwischen Parallelen sind. (Würden hingegen andere Werthe dx, dy, als die aus der Bedingungs-Gleichung hervorgehenden, in Vdx substituirt, so entstünde eine zwar in der tangirenden Ebene liegende, aber mit ab nicht mehr parallele Linie tsk, und die durch sie bestimmten Werthe dz, nämlich th, sc, kg etc. wären keineswegs einander gleich; sie würden einer anderen Curve entsprechen, die nicht Transversal-Curve wäre, und die daher auch den Werth $z = rp$ nicht zu einem Maximum oder Minimum machte, also also auch nicht der Variations-Curve entspräche.)

§ 43.

Erinnern wir uns nun aus Abschnitt II, wie die Variations-Gleichung bei solchen Functionen gefunden wird, in denen noch keine Integral-Ausdrücke enthalten sind. Man substituirt in dz die Bedingungs-Gleichung, setzt $dz = 0$, und leitet daraus die Variations-Curve ab. — Wird nun umgekehrt die Variations-Curve aus einer Gleichung $dz = 0$ abgeleitet, so ist diese Gleichung das erste Differenzial von z in Beziehung auf die Bedingungs-Gleichung.

Nun ist $Vdx = \left(\frac{1}{Fp}+1\right)\int\left(Ldxdy\right) + \left(\frac{1}{F}+p\right)Kdx$. Diese Gleichung zerlegt sich in die zwei folgenden: $Vdx = \left(\frac{1}{F}+p\right)Kdx$, und $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)\int\left(Ldxdy\right) = 0$. $Vdx = \left(\frac{1}{F}+p\right)Kdx$ drückt geo-geometrisch aus: $sc = mn$, $sc = \mu\nu$ etc., und $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)\int\left(Ldxdy\right) = 0$ drückt geometrisch aus: $sc - mn = 0$, $sc - \mu\nu = 0$ etc., so dass $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)\int\left(Ldxdy\right) = 0$, gleich $dz = 0$, ist, d. h. das Differenzial von z für die Bedingungs-Gleichung, denn nur die Bedingungs-Gleichung macht: $(sc - mn)$, $(sc - \mu\nu)$ etc. gleich Null, während jede andere Gleichung die Differenz der verschiedenen dz, $((sc - th)$, $(sc - kg))$ etc. keineswegs gleich Null macht.

Daraus haben wir das gesuchte Differenzial der Bedingungs-Gleichung: $dz = 0 = \left(\frac{1}{Fp}+1\right)\int\left(Ldxdy\right)$. Die partielle Integration nach x oder y giebt:

$$\left(\frac{1}{Fp}+1\right)\left(xLdy - \int xd(Ldy)\right) = 0 \quad (1).$$

$$\left(\frac{1}{Fp}+1\right)\left(yLdx + \int yd(Ldx)\right) = 0 \quad (2).$$

Es ist im Allgemeinen gleichgültig, welche dieser beiden Gleichungen gewählt wird. Nur, wenn die Bedingungs-Gleichung $x = c$ ist, muss, wegen $dx = 0$ Formel (1), und wenn die Bedingungs-Gleichung $y = c$ ist, muss aus demselben Grunde Formel (2) gewählt werden.

Um über Maximum und Minimum entscheiden zu können, wird diess erste Differenzial noch einmal differenzirt, aber jetzt im Sinne der Bedingungs-Gleichung. Da jedoch Ldx und $\int yd(Ldx)$, ebenso Ldy und $\int xd(Ldy)$, schon für die Variations-Gleichung gleich Null sind, so wird diess zweite Differenzial einfach $d^2z = \left(\frac{1}{Fp}+1\right)yd(Ldx)$, oder $= \left(\frac{1}{Fp}+1\right)xd(Ldy)$, worin, nach Substitution der Bedingungs-Gleichung, die Differenzialien $d(Ldx)$

und $d\,(Ldy)$ nicht mehr gleich Null sind, so dass nun die positiven oder negativen Zeichen von $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)y\,d\,(Ldx)$, oder von $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)x\,d\,(Ldy)$ über Maximum oder Minimum der Variation entscheiden.

Für $Y = 0$ (was bei der Bedingungs-Gleichung $x = c$ stattfindet) wird d^2z unbedingt gleich $xd\,(Ldy)$, da in diesem Falle die Gleichung $dz = \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$ stattfindet, woraus unmittelbar $d^2z = xd(Ldy)$ abgeleitet wird. In diesem Falle ist $\frac{1}{Fp} = \frac{1}{0\,.\,\infty} = 0.$

Für die übrigen Bedingungs-Gleichungen erhält $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)y$ einen bestimmten endlichen, positiven oder negativen Werth.

So kann nun das folgende einfache und leichte Gesetz der Entscheidung über Maximum oder Minimum aufgestellt werden:

Man nimmt aus der Variations-Gleichung die Ausdrücke: Ldx, d. h. $\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..\right)dx$ oder Ldy, differenzirt sie für die bereits gefundene Bedingungs-Gleichung und multiplicirt diese Differenzialien mit $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)y$ oder mit $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)x$; das positive oder negative Zeichen dieses Productes zeigt an, ob die Variation ein Minimum oder ein Maximum giebt.

§ 44.

Noch bliebe zu untersuchen und nachzuweisen, welchen Grad die Variations-Gleichung: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - .. = 0$ annimmt, je nachdem im Ausdrucke Vdx die Variabeln $x,\ y,\ p,\ q\,..$ sämmtlich enthalten sind, oder theilweise fehlen. Da diess jedoch bloss die Technik der Integration betrifft, und da der Ausgangspunkt: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - .. = 0$ derselbe ist, auch Behandlungsweise

und Resultate dieselben bleiben, wie auch immer die Gleichung: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$ abgeleitet werden möge, so übergehen wir diese an sich leichte Untersuchung, um so mehr, als sie in jeder der vorhandenen Theorieen nachgesehen werden kann.

Und nun, da sämmtliche Punkte der allgemeinen Formel erläutert sind, mögen einige Beispiele folgen, und zwar solche, die bereits bekannt und bearbeitet sind, damit die Resultate um so leichter verglichen und gegen einander gehalten werden können.

§ 45.

Beispiel 1. Gegeben ist: $z = \int (axy - y^3)\,dx$. (Euler Meth. inveniendi etc. pag. 39.)

I. Bedingungs-Gleichung. Da $V = (axy - y^3)$ kein dy enthält, so ist sogleich eine Bedingungs-Gleichung gegeben, nämlich: $x - c = 0$, demnach auch $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. (Keineswegs sind aber $\frac{\partial z}{\partial x}$ oden dy gleich Null.

II. Variations-Gleichung. Es ist $\left(N - \frac{dP}{dx} + \ldots\right) = 0$; demnach da weder P noch Q etc. in der Gleichung vorkommen, $N = 0$, daher $ax - 3y^2 = 0$, woraus die Variations-Gleichung $ax = 3y^2$ folgt, geometrisch eine Parabel.

III. Ableitung der Flächen-Gleichung. Da $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ist, so folgt aus $Vdx = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ die Gleichung: $V = \frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = axy - y^3$. Die Integration giebt: $z = \frac{1}{2}ax^2y - xy^3 + fy$, worin fy eine ganz beliebige Function von y ausdrückt.

Um sie zu bestimmen, wird z differenzirt:

$$dz = (axy - y^3)\,dx + (\tfrac{1}{2}ax^2 - 3xy^2 + f'y)\,dy.$$

Diess mit dem gegebenen Ausdrucke: $dz = (axy - y^3)\,dx$ verglichen, zeigt, dass $(\frac{1}{2}ax^2 - 3xy^2 + f'y) = 0$ sein müsse, für die Bedingungs-Gleichung $x = c$, für welche auch $dz = (axy - y^3)\,dx$ gleich Null wird. Es ist demnach $f'y = 3xy^2 - \frac{1}{2}ax^2$.

Da $3xy^2 - ax^2 = x(3y^2 - ax)$ (aus der Variations-Gleichung) gleich Null ist, so wird $f'y$ entweder $\frac{1}{2}ax^2$ oder $\frac{3}{2}xy^2$ (letzteres, wenn $3xy^2 - ax^2 = 0$ durch 2 dividirt, und von $f'y$ subtrahirt wird.) Nehmen wir $f'y = \frac{1}{2}ax^2$ (für $x = c$), so wird $fy = \frac{1}{2}ac^2y$. Demnach $z = \frac{1}{2}ay(x^2 + c^2) - xy^3$.

Soll diese Gleichung als Flächen-Gleichung geometrische Bedeutung haben, so ist z der Ausdruck einer Function der Ordinate ζ, die hier von dritter Dimension sein muss, also ζ^3, $b\zeta^2$ etc., b^3e^a etc. Die Grösse z als Function von ζ kann jede Verbindung der vorhergehenden Ausdrücke repräsentiren, mit der einzigen Einschränkung, dass dz unbedingt positiv bleibt, wenn es in $dz = Vdx$ positiv gegeben ist. Die geometrische Flächen-Gleichung ist demnach:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2}ay(x^2 + c^2) - xy^3.$$

IV. Entscheidung über Maximum und Minimum.

a) Aus der gefundenen Flächen-Gleichung. Diese giebt, für $x = c$ differenzirt:

$$dz = (ac^2 - 3cy^2)\,dy;\ d^2z = -6cy\,dy^2.$$

b) Aus der Differenzial-Formel: $d^2z = xd(Ldy)$. Hier ist $L = N = ax - 3y^2$, und $d(Ldy)$ für $x = c$, wird gleich $-6y\,dy^2$, demnach $d^2z = -6xy\,dy^2 = -6cy\,dy^2$, ein mit dem vorhergehenden vollkommen übereinstimmendes Resultat.

Dieser Ausdruck ist für positive y negativ, und für negative y positiv. Die Variations-Curve $ax = 3y^2$ giebt daher für positive y Maxima, und für negative y Minima.

Euler findet unbedingt Maxima, und sein Schluss, den er aus der Vergleichung der Variations-Parabel mit der geraden Linie $y = nx$ zieht, dass nämlich das Integral-Resultat der geraden Linie: $(\frac{1}{3}nax^3 - \frac{1}{4}n^3x^4)$ unbedingt kleiner sei als das Integral-Resultat der Parabel: $\frac{4}{15}ax^2\sqrt{\frac{ax}{3}}$, verliert an Gültigkeit, weil unbewusst der Werth $\sqrt{\frac{ax}{3}}$, d. h. y, bloss positiv genommen wird, während das Wurzelzeichen auch den negativen Werth y repräsentirt.

Geometrisch ist diess sehr leicht einzusehen. Der Ausdruck z hat in der Flächen-Gleichung: $\underset{4}{f}(\zeta) = \frac{1}{4}ay(x^2 + c^2) - xy^3$, für $\pm y$, d. h. in verschiedenen Coordinaten-Räumen, selber verschiedene Zeichen, so dass allgemein für die Variations-Curve in den Flächen-Räumen $+X+Y$ und $+X-Y$ positive und negative Maxima für z hervorgehen, was auch die Formel $d^2z = -6cy\,dy^2$ andeutet.

V. Herstellung der Projectionen der räumlichen Variations-Curve. Wird in $Vdx = (axy - y^3)\,dx$ der Werth $ax = 3y^2$ aus der Variations-Curve substituirt, so wird $z = \underset{4}{f}(\zeta)$ $= \int \frac{2}{3} ax \sqrt{\frac{ax}{3}}\,dx$ oder $\underset{4}{f}(\zeta) = \frac{4}{15} ax^2 \sqrt{\frac{ax}{3}}$, was je nach dem Werthe, den $\underset{4}{f}(\zeta)$ in der Flächen-Gleichung hat, eine Parabel oder eine transcendente Curve repräsentirt. Sie ist die Projection in der Ebene XZ. Wird $adx = 6ydy$ in $\int(axy - y^3)\,dx$ substituirt, so folgt $z = \int \frac{12y^4 dy}{a} = \frac{12y^5}{5a}$, die Projection in der Ebene YZ, von der wieder je nach dem Werthe, den $\underset{4}{f}(\zeta)$ in der Flächen-Gleichung annimmt, dasselbe gilt, wie von der Projection in der Ebene XZ.

Zusatz 1. Nimmt man allein die Flächen-Gleichung, $z = \frac{1}{2}ay(x^2 + c^2) - xy^3$, so sind unzählig viele Variations-Curven für unzählig viele verschiedene und beliebige Bedingungs-Gleichungen möglich, so dass z. B. die Bedingungs-Gleichung $\mu x + \nu y = yb$ eine ganz andere Variations-Curve giebt, als die gefundene Curve: $ax = 3y^2$, woraus man auf die Unbestimmtheit des Problems zu schliessen versucht werden könnte. Allein diese Experimente mit verschiedenen Bedingungs-Gleichungen und verschiedenen Variations-Curven haben ihre Schranke darin, dass ihre Substitutionen in $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ den gegebenen Ausdruck Vdx herstellen müssen, und diess vermag nicht eine beliebig abgeleitete Variations-Curve, sondern die gefundene $ax = 3y^2$.

Zusatz 2. Doch ist diese Variations-Curve nicht die einzig mögliche. In § 38 haben wir drei äquivalente Formeln für die Variations-Curven gefunden, und wählen wir statt: $\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..\right) = 0$ die Formel: $\frac{dN}{dx} - \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^3Q}{dx^3} - .. = 0$, dann wird $V = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\frac{C}{p} + \frac{yN}{p}\right)$.

Nun giebt die Variations-Gleichung $dN = 0$ integrirt $N = -k^2$, also $ax - 3y^2 = -k^2$, eine von $ax - 3y^2 = 0$ verschiedene Variations-Curve. Für diese Variations-Curve: $3y^2 - ax = k^2$ findet man die Bedingungs-Gleichung aus: $V = \left(\frac{1}{F} + p\right)\frac{yN}{p}$, worin der Vereinfachung willen $C = 0$ gesetzt ist.

Es wird: $axy - y^3 = -\frac{yk^2}{pF} - yk^2$, woraus $2y^2 = -\frac{k^2}{pF}$, und da $p = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{6y}$ ist: $F = -\frac{3k^2}{ay}$.

Nun ist für die Bedingungs Gleichung: $F = -\frac{dx}{dy}$; es wird demnach $\frac{dx}{dy} = \frac{3k^2}{ay}$, woraus durch Integration die Bedingungs-Gleichung folgt: $ax = 3k^2 \log\left(\frac{y}{c}\right)$, in welcher die Constante c in den successiv eintretenden Transversal-Curven continuirlich aufeinanderfolgende Werthe annimmt.

Die Untersuchungen über Flächen-Gleichung, über Maximum und Minimum, über Projections-Curven etc. werden wie im Vorhergehenden geführt.

Zusatz 3. Die dritte Formel § 38, $(\int(Ndx) - P + ..) = 0$ findet in diesem Beispiele keine Anwendung, da $\int(ax - 3y^2)\,dx$ unmöglich hergestellt werden kann, wenn nicht $ax - 3y^2 = 0$ ist, was auf die zuerst gefundene Variations-Curve zurückführt.

§ 46.

Beispiel 2. Gegeben ist:

$$z = \int(15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)\,dx. \text{ (Euler pag. 40.)}$$

I. Bedingungs-Gleichung. Auch hier ist, wie in Beispiel I, die Bedingungs-Gleichung $x = c$; ebenso $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial x} = V$.

II. Variations-Gleichung. Aus $N = 15(a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4) = 0$ folgt: $a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4 = 0$ als Variations-Gleichung, die sich in die Factoren $(ax - y^2)(ax + y^2 - a^2) = 0$ zerlegt, so dass zwei Parabeln den Bedingungen der Variation entsprechen.

III. Herstellung der Flächen-Gleichung. Aus $\frac{\partial z}{\partial x} = V$ folgt:

$$z = 5a^2x^3y - \frac{15}{2}a^3x^2y + 5a^2xy^3 - 3xy^5 + fy.$$

Die noch willkürliche Function fy wird durch Differenzirung von z hergestellt. Es wird:

$$dz = (15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)\,dx +$$
$$+ \left(5a^2x^3 - \frac{15}{2}a^3x^2 + 15a^2xy^2 - 15xy^4 + f'y\right) dy.$$

Da $dz = Vdx$ ist, so folgt: $5a^2x^3 - \frac{15}{2}a^3x^2 + 15a^2xy^2 - 15xy^4 + f'y = 0$. Wird $N = 0$ davon subtrahirt, so folgt: $10a^2x^3 - \frac{15}{2}a^3x^2 = f'y$, oder für $x = c$, $fy = 10a^2c^3y - \frac{15}{2}a^3c^2y$.

Die vollständige Flächen-Gleichung ist demnach:

$$z = 5a^2y(x^3 + 2c^3) - \frac{15}{2}a^3y(x^2 + c^2) + 5a^2xy^3 - 3xy^5.$$

IV. Entscheidung über Maximum und Minimum aus Differenzial-Operationen:

$Ldy = 15\,(a^2x^2 - a^3x - a^2y^2 - y^4)\,dy$ für $x = c$, wird: $d(Ldy) = 30y(a^2 - 2y^2)\,dy^2$, $xdLdy = 30xy(a^2 - 2y^2)\,dy^2$.

Für positive Werthe von y ist dieser Ausdruck negativ, wenn $2y^2 > a^2$, und positiv, wenn $2y^2 < a^2$ ist.

Die erste Parabel giebt für $x = \frac{1}{2}a$ die Gleichung: $a^2 - 2y^2 = 0$ und für $x < \frac{1}{2}a$ ist $2y^2 > a^2$. Für die zweite Parabel findet das Umgekehrte statt. — Die erste Parabel giebt daher von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}a$ ein Minimum, und von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = \infty$ ein Maximum von z. Das Entgegengesetzte tritt für die zweite Parabel

ein, wornach Euler's Schlussbemerkung zu interpretiren ist. Hingegen für negative Werthe von y, die allerdings stattfinden können, tritt für beide Parabeln in Bezug auf Maximum und Minimum von z das entgegengesetzte Resultat ein, was sich auch nach Construction der Flächen-Gleichung sehr leicht geometrisch interpretiren lässt.

§ 47.

Beispiel 3. Gegeben ist: $z = \int \frac{yp^3 dx}{1+p^2}$. (Das Newton'sche Problem; Newt. Phil. nat. princ. math. Sectio VII, 35, Scholion, Euler pag. 51, und andere Autoren.)

I. Bedingungs-Gleichung. Da in diesem Ausdrucke kein x enthalten ist, so ist eine Bedingungs-Gleichung sogleich $\frac{1}{F} = 0$, demnach $dy = 0$, $y = c$.

II. Variations-Gleichung. Diese wird sogleich aus $V + C = \left(\frac{1}{F} + p\right) P$, d. h. aus $V + C = pP$ hergestellt.

Da $P = \frac{p^2 y (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}$ ist, so folgt $\frac{yp^3}{1+p^2} + a = \frac{yp^3 (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}$; woraus $2p^3 y = a (1 + p^2)^2$ als Variations-Gleichung hervorgeht.

Da diese Gleichung in Bezug auf p vom vierten Grade ist, so kann sie nicht so integrirt werden, dass y durch x gegeben würde. Man bestimmt daher nach Newton's Vorgange sowohl x als y durch p, und erhält zwei Gleichungen für x und y, aus denen durch Elimination von p, soweit es die Algebra vermag, die Variations-Curve $\varphi(x, y) = 0$ folgt.

Es ist sogleich $y = \frac{a (1 + p^2)^2}{2p^3}$. (α)

Aus $p = \frac{dy}{dx}$ folgt $dx = \frac{dy}{p}$, $x + c = \int \frac{dy}{p}$, $x + c = \frac{y}{p} + \int \frac{y dp}{p^2}$.

Wird aus α der Werth y substituirt, so folgt:

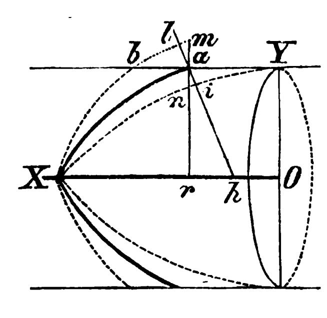
$$x + c = \frac{a (1 + p^2)^2}{2p^4} + a \int \frac{(1 + p^2)^2 dp}{2p^5},$$

$$x + c = \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log p\right). \quad (\beta)$$

III. Herstellung einer zweiten Bedingungs-Gleichung. Auch die Normale ist Bedingungs-Gleichung der gefundenen Variations-Curve. Denn wird in $V + \frac{C}{p}\left(\frac{1}{F} + p\right) = \left(\frac{1}{F} + p\right) P$ die Substitution $F = p$ vorgenommen (die Normal-Gleichung, § 22, Zusatz 2), so folgt: $\frac{yp^3}{1+p^2} + \frac{C(1+p^2)}{p^2} = \frac{(1+p^2)\,p^2 y\,(3+p^2)}{p\,(1+p^2)^2}$, $3p^3 y = C(1+p^2)^2$, was mit der gefundenen Gleichung $2p^3 y = a(1+p^2)^2$ identisch ist, wenn $2C = 3a$ gesetzt wird.

Ist daher *(Fig. VIII.)* die Curve Xa die Variations-Curve, so sind die geraden Linien bY und lh (Normale) Bedingungs-Gleichungen, d. h. die Curve Xa giebt kleinere Werthe von z, als die Curven Xb und XY, oder auch als die Curven Xl und Xi; keineswegs aber gilt diess für die Linie mr ($x = c$), denn für diese Gleichung giebt die Curve Xn einen kleineren und Xm einen grösseren Werth von z als die Variations-Curve Xa, so dass für dieses Problem weder $x = c$ noch $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ gelten kann, wie sonst angenommen wird.

Fig. VIII.



IV. Entscheidung über Maximum und Minimum aus Differenzial-Operationen.

Aus der Differenzirung von V folgt: $N = \frac{p^2}{1+p^2}$, $P = \frac{3yp^2 + yp^4}{(1+p^2)^2}$, demnach $\frac{dP}{dx} = \frac{3p^3 + p^5}{(1+p^2)^2} - \frac{2yp\,(p^2-3)}{(1+p^2)^3}\,dp$.

Aus dem Differenzial der Gleichung (α) $y = \frac{a\,(1+p^2)^2}{2p^3}$ folgt: $dp = \frac{2p^5}{a\,(1+p^2)\,(p^2-3)}$. Dieser Werth in $\frac{dP}{dx}$ substituirt, giebt: $Ldx = \left(N - \frac{dP}{dx}\right) dx = \left(\frac{-2p^3}{(1+p^2)^2} + \frac{4yp^6}{a\,(1+p^2)^4}\right) dx$.

Wird nun $\left(\frac{1}{pF} + 1\right) yd\,(Ldx)$ im Sinne der Bedingungs-Gleichung

ausgeführt, so wird d^2z für die Transversal-Curve gefunden. Ist die Normale Bedingungs-Gleichung, so wird $p = -\frac{dx}{dy}$, d. h. es wird $-\frac{1}{p}$ statt p substituirt, und nach p differenzirt. Statt dessen kann sogleich nach p differenzirt und am Ende überall $-\frac{1}{p}$ statt p substituirt werden.

Diese Operation $d(Ldx)$ ausgeführt und $dp = \frac{2p^5}{a(1+p^2)(p^2-3)}$ substituirt, giebt:

$$d\,(Ldx) = \left(\frac{4p^7}{a\,(1+p^2)^4} - \frac{16yp^{10}}{a^2(1+p^2)^6}\right) dx^2.$$

Wird aus Gleichung α der Werth $\frac{y}{a} = \frac{(1+p^2)^2}{2p^3}$ substituirt, so folgt: $d(Ldx) = -\frac{4p^7}{a(1+p^2)^4}\,dx^2$.

Und nun $-\frac{1}{p}$ statt p substituirt, folgt: $d^2z = (1+p^2)\,yd\,(Ldx)$, oder $d^2z = +\frac{4yp}{a(1+p^2)^3}\,dx^2$, ein unbedingt positiver Werth, da wegen $log\ p$ (in der Variations-Gleichung) der Werth p positiv sein muss. Die gefundene Curve giebt daher Minima.

§ 48.

Beispiel 4. Gegeben ist: $z = \int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}\,dx$. (Die Brachystochrone; Euler § 34 und andere Autoren.)

I. Variations-Gleichung. Da $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}$, $Q = 0$.. ist, so folgt: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - .. = -\frac{1}{dx}d\left(\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p}}\right) = 0$, demnach: $\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = C = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, woraus $p = \frac{x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $dy = \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, und durch Integration:

$$y = a\ arc\,.\cos\left(\frac{a-x}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2},$$

welches die bekannte Gleichung der Cycloide ist.

Zu bemerken ist, dass in den vorausgehenden Gleichungen der positive Werth des Wurzelzeichens genommen wird, so dass derselbe Werth in der Entscheidung über Maximum und Minimum beibehalten werden muss.

II. **Bedingungs-Gleichung.** Aus $V = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\frac{C}{p} + P\right)$, $\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\frac{C}{p} + \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}\right)$ folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{C}{Fp} + C + \frac{P}{F}.$$

Da $P = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ist, so werde $C = \frac{k}{\sqrt{2a}}$ gesetzt, und da $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p\sqrt{2a}}$ ist, folgt:

$$\frac{1}{p\sqrt{2a}} - \frac{k}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{F}\left(\frac{k}{p\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\right),$$

und daraus $F = \frac{k+p}{1-pk}$, worin k jede constante Grösse bezeichnet.

Da der geometrische Ausdruck von $\frac{k+p}{1-pk}$ noch nicht ermittelt ist, und die Substitution: $p = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$ ein schwieriges Differenzial giebt, so setzen wir $k = 0$, woraus eine allgemeine Bedingungs-Gleichung folgt: $F = p$, nach § 22 die **Gleichung der Normale.**

Dieselbe Gleichung würde sogleich gefunden worden sein, wenn in $V = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\frac{C}{p} + P\right)$ die Constante C gleich Null gesetzt worden wäre.

III. **Entscheidung über Maximum und Minimum aus Differenzial-Operationen.** Im gegebenen Probleme ist $L = -\frac{dP}{dx}$, und da $P = \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}}$ ist, wird $L = -\frac{dP}{dx} =$ $= \left(\frac{p}{2x\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}} - \frac{dp}{\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)^3}\,dx}\right)$. Nun folgt aus $\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ durch Quadrirung: $\frac{2ap^2}{1+p^2} = x$, welches

differenzirt $\frac{dp}{dx} = q = \frac{(1+p^2)^2}{4ap}$ giebt. Dieser Werth substituirt, wird $L = \frac{p}{2x\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}} - \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{4ap\sqrt{x}}$; und nun im Sinne der Bedingungs-Gleichung, also bloss nach p differenzirt, wird

$$d(Ldx) = \frac{q}{2\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}}\left(\frac{1}{x(1+p^2)} + \frac{1}{2ap^2}\right)dx^2.$$

Damit das zweite Differenzial d^2z hervorgehe, muss überall $-\frac{1}{p}$ statt p substituirt und $d(Ldx)$ mit $\left(\frac{1}{Fp}+1\right)y$ multiplicirt werden.

Die Substitution von $-\frac{1}{p}$ statt p in $q = \frac{(1+p^2)^2}{4ap}$ giebt $-\frac{(1+p^2)^2}{4ap^3}$; und in $\sqrt{1+p^2} = p\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}$ giebt die nämliche Substitution: $-\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$. Es wird daher $d^2z = \left(\frac{1}{Fp}+1\right)yd(Ldx)$ $= (1+p^2)yd(Ldx)$, $d^2z = +\frac{y\sqrt{(1+p^2)^5}}{8a\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x(1+p^2)} + \frac{1}{2a}\right)dx^2$ oder reducirt:

$$d^2z = +\frac{y\sqrt{(1+p^2)^3}}{16a^2x\sqrt{x}}(2a + x(1+p^2))\,dx^2,$$

so dass die Variations-Curve unbedingt **Minima** giebt.

IV. Ableitung der Projections-Gleichungen der Variations-Curve.

a) Die Projection in der Ebene XY ist die Cycloide: $y = a \arccos \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$, die Linie Oay *(Fig. IX.)*.

b) Die Projection in der Ebene XZ wird gefunden, wenn der Werth $p^2 = \frac{x}{2a-x}$ in $dz = \frac{\sqrt{1+p^2}\,dx}{\sqrt{x}}$ substituirt, und dz integrirt wird. Es folgt $dz = \frac{\sqrt{2a}\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $z = \sqrt{2a} \arccos \frac{a-x}{a}$, worin z für $x = 0$ ebenfalls gleich Null ist, so dass das Integral vom Anfangspunkte der Cycloide genommen wird.

Weil jedoch die Fallzeit nicht $\int \frac{\sqrt{(1+p^2)}\,dx}{\sqrt{x}}$, sondern $\int \frac{\sqrt{(1+p^2)}\,dx}{\sqrt{2g}\sqrt{x}}$ ist (der constante Factor $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ward, weil ohne Einfluss auf die Variation, weggelassen), so ist die wahre Fallzeit: $z = \sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\cos \frac{a-x}{a}$, worin g den bekannten numerischen Werth der beschleunigenden Kraft ausdrückt.

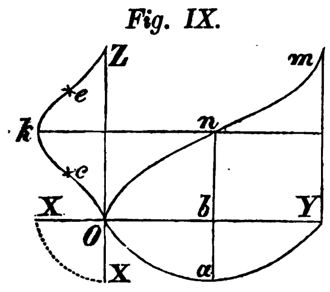


Fig. IX.

Ist die Linie OZ (*Fig. IX.*) das lineare Mass der Fallzeit für $y = 2a\pi = OY$, so wird die lineare Gleichung: $z = a\sqrt{\frac{a}{g}}\, arc\cos \frac{a-x}{a}$, oder $x = a\left(1 - \cos \frac{z\sqrt{g}}{a\sqrt{a}}\right)$ d. i. die Linie $OckeZ$.

c) Um die Projection auf ZY zu erhalten, wird in die Gleichung der Cycloide der eben gefundene Werth x substituirt, woraus $y\sqrt{\frac{a}{g}} = z - a \sin \frac{z\sqrt{g}}{a\sqrt{a}}$ folgt, die Curve Onm. (Die Cycloide hat die Ordinate x im Punkte a als Maximum, die Curve OkZ tangirt die Linie OZ in den Punkten O und Z, sie hat in k ein Maximum von x und in den Punkten c und e Inflexionspunkte. — Die Curve Onm tangirt OZ in O und my in m und hat im Punkte n (für $y = a\pi$) einen Inflexionspunkt.)

Zusatz. Der Sinn der gefundenen Bedingungs-Gleichung $F = p$ d. h. $-\frac{dx}{dy}$ (für die Transversal-Curve) gleich $p = \frac{dy}{dx}$ ist folgender: Die Cycloide $OcrY$ (*Fig. X.*) ist der geometrische Ort aller absoluten Minima von z, die in der Variations-Fläche für die Normal-Schnitte der Variations-Curve ein-

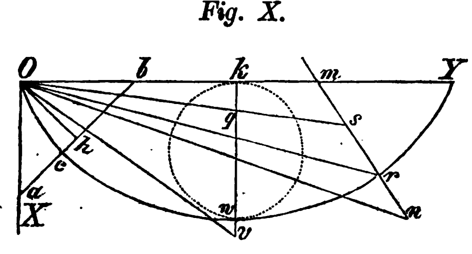


Fig. X.

treten, d. h. z ist kleiner z. B. für den Punkt c als für alle Punkte, die in der Normale ab liegen, so dass ein Körper, der nach dem Gesetze der Schwere fällt, in der Cycloide früher beim Punkte c anlangt, als z. B. bei den Punkten h oder a, wenn er in den Linien Oh oder Oa fiele. Keineswegs würde diess aber für Punkte einer von der Normale verschiedenen Linie allgemein gelten. Ebenso gelangt ein Körper in der Cycloide früher nach w, als in irgend einer anderen Linie etwa nach den Punkten v oder q, früher nach r als nach den Punkten m, s, n etc. Ebenso gelangt er früher in der Cycloide nach den Punkten c, w, r .., als in irgend einer anderen Linie.

Würde ein Körper in den geraden Linien OM, Os, Or, Ox etc. fallen, so wäre die Fallzeit des Körpers, der in der Linie Or fällt, ein Minimum. Ist daher das Problem gegeben, den Punkt einer willkürlichen Linie mn zu bestimmen, für welche die Fallzeit vom Punkte O aus ein Minimum ist, so wird der Punkt r gefunden, der durch die Cycloide und durch mn als Normale der Cycloide gegeben ist.

Wäre die Entfernung Om und die Lage der Linie mn gegen OY eine andere, so würde eine andere Cycloide, aber doch mn als Normale dieser Cycloide gefunden, und der Punkt des schnellsten Falles in ihr wäre ihr Durchschnittspunkt mit der Cycloide.

§ 49.

In den nun folgenden Beispielen wird es sich vornehmlich um die Bedingungs-Gleichungen handeln, weil von ihnen die übrigen Bestimmungspunkte abhängig sind.

I. Gegeben ist: $\int xy\,dx \sqrt{(1+p^2)}$. (Euler § 37.)

Hier ist $N = x\sqrt{(1+p^2)}$; $P = \frac{xyp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, und die aus $N - \frac{dP}{dx} = 0$ folgende Variations-Curve kann nicht leicht durch Integration hergestellt werden.

Sollte sie aber auch unbekannt bleiben, so folgt doch aus $V = \left(\frac{1}{F}+p\right)\left(\frac{C}{p}+P\right)$ sehr einfach die Bedingungs-Gleichung.

Setzen wir, wie bei der Brachystochrone, $C = 0$, dann wird $xy\sqrt{(1+p)} = \left(\frac{1}{F}+p\right)\frac{xyp}{\sqrt{(1+p^2)}}$; $1+p^2 = \left(\frac{1}{F}+p\right)p$; $F=p$, so dass die Normale der (unbekannnten) Variations-Curve als Bedingungs-Gleichung erscheint.

II. Gegeben ist: $z = \int\frac{-(1+p^2)^2\,dx}{q}$ (der analytische Ausdruck des Problems, die Curve zu finden, die mit ihrer Evolute den kleinsten Raum einschliesst).

Da in diesem Ausdrucke kein x enthalten ist, so kann man die Variations-Curve sogleich aus Gleichung II. ableiten:

$$V = \left(\frac{1}{F}+p\right)\left(\frac{D}{p}+P-\frac{dQ}{dx}+(Q-.)\frac{q}{p}.\right.$$

Setzt man, da V kein x enthält, $V = p\left(\frac{D}{p}+P-\frac{dQ}{dx}\right)+Qq$, wie Euler und nach ihm andere Autoren thun, und was vollkommen richtig ist, so folgt die unerwartete Bedingungs-Gleichung $\frac{1}{F} = 0$, also $dy = 0$, $y = c$ (als Transversal-Curve). Im gegebenen Beispiele wird, da $N = 0$, also $P - \frac{dQ}{dx} = C$ ist, $V = D + Cp + Qq$, oder: $\frac{(1+p^2)^2}{q} = D + Cp - \frac{(1+p^2)^2}{q}$, $\frac{2(1+p^2)^2}{q} = D + Cp$.

Es verdient, bei Euler verglichen zu werden, welche viele Transformationen nothwendig waren, dass diese Gleichung als eine Differenzial-Gleichung der Cycloide erkannt wurde. — Und doch ist diess auf den ersten Blick einzusehen. Denn aus $q = \frac{(1+p^2)^2}{4ap}$ (§ 48, IV.) folgt für die Cycloide: $\frac{(1+p^2)^2}{q} = 4ap$, und diess in die voranstehende Gleichung substituirt, giebt: $8ap = D + Cp$, also $D = 0$, $C = 8a$, so dass die Cycloide die Curve ist, die das verlangte Minimum giebt.

Zusatz. Die Bedingungs-Gleichung $y = c$ zeigt an, dass die Transversal-Curven senkrecht auf OY stehen (Fig. IX. § 48), z. B. kw, und zwar in allen Punkten, in den Punkten

b, m etc., wonach die geometrische Construction der Curve und ihrer Evolute sehr leicht herzustellen ist. Die Cycloide schliesst mit ihrer Evolute einen kleineren Raum ein, als Curven, die ihr zu beiden Seiten liegen und bis zu ihrem Durchschnitte mit der Abscisse x verlängert sind, auch einen kleineren Raum, als die Curve mit ihrer Evolute einschliesst, die in der Abscisse x denselben Punkt mit ihr gemeinschaftlich hat.

III. Gegeben ist: $z = \int \left(\frac{2ay}{x^2} - p^2\right) dx$.

Es wird $N = \frac{2a}{x^2}$, $P = -2p$; demnach: $\frac{2a}{x^2} + 2q = 0$ die Gleichung der Variations-Curve.

Aus $\frac{2a}{x^2} + 2q = 0$ folgt: $dp = -\frac{adx}{x^2}$; $p = \frac{a}{x} + C$, und daraus $y = a \log \frac{x}{c} + Cx$.

Wird die Constante C so bestimmt, dass y für $x = c$ gleich Null wird, so folgt: $y = a \log \frac{x}{c}$.

Die Bedingungs-Gleichung findet man aus $V = \left(\frac{1}{F} + p\right) P$. Es wird $\frac{2ay}{x^2} - p^2 = -\frac{2p}{F} - 2p^2$, und daraus, wenn $p = \frac{a}{x}$ substituirt wird: $-\frac{1}{F} = \frac{2y + a}{2x}$. Da für die Transversal-Curve $F = -\frac{dx}{dy}$ ist, so folgt: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + a}{2x}$, und durch Integration $2y + a = 2\gamma x$; ein System aufeinander folgender gerader Linien, die für $y = 0$ sämmtlich den Punkt $a = 2\gamma x$ geben, so dass sie sämmtlich durch einen Punkt gehen, und sich um ihn bewegen, je nach den Werthen, die für γ substituirt werden.

Zusatz. Dieses Problem verdient weiter verfolgt zu werden, sowohl wegen der Flächen-Gleichung, als auch, weil $Vdx = \left(\frac{2ay}{x^2} - p^2\right) dx$ unter der Bedingung, dass dz allgemein gleich Null ist, für sich integrabel wird. Denn $V = 0$ zerlegt

sich in die Factoren: $\left(\frac{\sqrt{2ay}}{x}+\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{\sqrt{2ay}}{x}-\frac{dy}{dx}\right)=0$, deren Integral $\left(\log\frac{x}{c}+\frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{a}}\right)\left(\log\frac{x}{c}-\frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{a}}\right)=\left(\log\frac{x}{c}\right)^2-\frac{2y}{a}=0$ ist. Und doch ist für diesen Werth V die allgemeine Formel: $N-\frac{dP}{dx}+..$ nicht identisch gleich Null.

§ 50.

Von hier aus gehen wir zu den Fällen über, von denen gelehrt wird, dass bei ihnen der Variations-Calcul nicht zur Anwendung kommen könne. Sie sind folgende:

1) Die Gleichung: $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-..=0$ wird identisch gleich Null, woraus nichts geschlossen werden kann, weil keine Prämisse vorliegt.

2) Die Gleichung: $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-..=0$ wird einer constanten Grösse gleich, was ein Widerspruch ist, gegen den der Calcul nichts vermag.

In beiden Fällen ist es jedoch nicht schwer, ein leichtes Versehen nachzuweisen, so dass der Variations-Calcul in den Ausdrücken $\int Vdx$ überall zur Anwendung kommen kann.

Der erste Fall: $N-\frac{dP}{dx}+..=$ identisch Null tritt ein, wenn $dz=Vdx$ unbedingt integrirbar ist, denn $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-..=0$ ist das Criterium der Integrabilität gegebener Differenzial-Gleichungen. Man findet daher sogleich durch Integration: $z=\int Vdx=f(x,y)$, so dass die Flächen-Gleichung gegeben erscheint; diese Probleme gehören also in Abschnitt II., und es können unendlich viele Variations-Curven für beliebige Bedingungs-Gleichungen abgeleitet werden.

Es ist im § 26 davon gehandelt worden. Ist z. B. $Vdx=(y-(2y-x)p)dx$ gegeben, so wird $N=1-2p$, $P=-(2y-x)$, daher $N-\frac{dP}{dx}=(1-2p)-(1-2p)=0$, und diess ist ein

Zeichen, dass $(y-(2y-x)p)\,dx$ unbedingt integrirbar ist. In der That wird auch $z = xy - y^2$, d. h. es wird sogleich die Flächen-Gleichung gefunden. Für die Begründung der Lehre, dass der Calcul bei $z = xy - y^2$ unbedingt eingreifen könne, während er bei $dz = (y - (2y - x)\,p)\,dx$ (was doch ganz dasselbe ist) nicht eingreifen könne, findet sich kein Grund in der historischen Entwicklung der Variations-Rechnung.

Der zweite Fall tritt ein, wenn $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$, einer constanten Grösse gleich wird, was ein Widerspruch ist. Z. B. $z = \int (xp - y)\,dx$. Hier wird $N = -1$, $P = x$, demnach $N - \frac{dP}{dx} = -2$, während $N - \frac{dP}{dx} = 0$ sein sollte. Bekanntlich ist $z = \int (xp - y)\,dx$ der analytische Ausdruck des Problems, eine Curve zu finden, deren Sector ein Maximum oder Minimum ist. Werden Polar-Coordinaten genommen, so ist: $2\,Sect. = \int u^2 d\varphi$, worin u den Radius und φ den entsprechenden Winkel bezeichnet. Wird dieser Ausdruck variirt, so folgt: $N = 2u$, $P = 0$, demnach $N = 0$, $u = 0$, ein Resultat, das keinen Widerspruch in sich schliesst, sondern anzeigt, dass es für die gewählte Variations-Gleichung eine solche Curve einfach nicht gebe. Denn der Radius $u = 0$ bezeichnet einen Punkt, nicht eine Curve.

Werden statt der Polar-Coordinaten die rechtwinkeligen Coordinaten substituirt, $\varphi = arc.\,tg.\frac{y}{x}$, $u^2 = x^2 + y^2$, so folgt: $2\,Sect. = \int (xp - y)\,dx$, und das nämliche Problem sollte nun in dieser Form des Calculs den Widerspruch: $-2 = 0$ geben?

§ 51.

Die allgemeine Lösung beider Schwierigkeiten besteht darin, dass man $\int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right) dx\,dy = 0$, $(\int L\,dx\,dy = 0)$ als die einzige Variations-Gleichung nimmt, während § 38 bewiesen wurde (worauf auch schon Euler hingedeutet hat), dass drei äquivalente Formeln eintreten: 1) $Ldxdy = 0$, 2) $(\int Ldx)\,d^2y = 0$, 3) $yd(Ldx) = 0$. Die erste Formel nimmt man in den allermeisten Problemen, während man in allen auch Formel (2)

und (3) experimentiren könnte. Die Formel (2) muss nun da genommen werden, wo Ldx identisch gleich Null, also z für sich integrabel ist. Und Formel (3) wird genommen, wenn L statt Null einer constanten Grösse gleich wird, weil dann das Differenzial von L gleich Null wird, was nicht ein Widerspruch, sondern ein vollkommen brauchbares Resultat ist.

Wird $L = C$, dann folgt:

$$V = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\frac{yL}{p} + \frac{C}{p} + P + ..\right),$$

eine einzige Gleichung für zwei unbekannte Grössen, nämlich für F (Bedingungs-Gleichung) und für die Variations-Curve. Es sind also auch in diesem, wie im zweiten Falle, unendlich viele Auflösungen möglich, indem für andere Bedingungs-Gleichungen auch andere Variations-Gleichungen hervorgehen.

Beispiel. Ist das Problem $Vdx = (xp - y)\,dx$ gegeben, so ist $V = xp - y$, $N = -1$, $P = x$, $L = -2$, und ($C = 0$ gesetzt) $(xp - y) = \left(\frac{1}{F} + p\right)\left(\frac{-2y}{p} + x\right)$, $y = \frac{px - 2y}{pF}$. Werden nun beliebige Bedingungs-Gleichungen genommen, z. B. $x \pm y = a$, $x^2 \pm ay^2 = b^2$ etc., so wird $F = \left(-\frac{dx}{dy}\right) = \mp 1$, $\mp \frac{ay}{x}$ etc.

Diese Werthe in $ypF = px - 2y$ substituirt, geben Differenzial-Gleichungen zwischen x, y, p.., deren Integration die entsprechenden Variations-Gleichungen liefert.

Werden z. B. die Sectoren mit $2bz$ bezeichnet, und ist z Ordinate, so ist $2bz = f(x, y)$ eine Flächen-Gleichung, in welcher eine gefundene Variations-Curve grössere oder kleinere Werthe von z giebt, als alle rechts und links liegenden zur Bedingungs-Curve gezogenen anderen Curven.

Zusatz. Den drei möglicherweise eintretenden Fällen der Variation entsprechen genau die drei Formeln: $Ldxdy = 0$; $d^2y\int Ldx = 0$; $yd(Ldx) = 0$. Die erste Formel entspricht den vollkommen bestimmten Problemen; zweite und dritte Formel entsprechen unbestimmten Problemen; sie geben aber nicht Nichts,

wie man annimmt, sondern eine unzählige Menge richtiger Lösungen; und so wenig, als in der Algebra die unbestimmte Analytik verworfen wird, so wenig sind diese Formeln zu verwerfen. Auch können diese unzähligen Auflösungen durch anderwärts gegebene Bedingungen auf eine bestimmte Anzahl beschränkt werden, was eben von der Natur der einzelnen Probleme abhängig ist.

§ 52.

Wenn nun im Allgemeinen die Probleme dieses Abschnitts erledigt sind, so bleibt dennoch Mehreres und nicht Unwichtiges zu erläutern übrig. Denn die Methode der Grundlegung einer Theorie ist eine andere, als die der Theorie selber; wenn in dieser von festgestellten, sicheren Principien aus alle Lehrsätze abgeleitet werden, so gilt es bei der Grundlegung vielmehr, Alles Schritt vor Schritt zu elementarisiren, damit jeder einzelne Punkt in seiner Bedeutung vollständig erfasst werde.

Wir haben bisher nicht von den Grenzwerthen gehandelt, die in anderen Theorieen der Variation eine so grosse Rolle spielen; wir haben sie ausgeschlossen, unbedingt, absichtlich, weil die Variationen allgemein, und nicht bloss zwischen bestimmten Integral-Grenzen zu gelten haben. Diess ist sehr leicht zu beweisen. Jeder Satz gilt so, wie er abgeleitet ist. Braucht man zu seiner Ableitung gewisse Einschränkungen, damit er gültig bleiben kann, so gilt er nur unter diesen Einschränkungen; kann man ihn allgemein ableiten, so gilt er allgemein. Diess ist aber bei allen vorausgehenden Lehrsätzen der Fall gewesen, mithin gelten die Variationen allgemein.

Zudem ist die Untersuchung über die Grenzwerthe ganz allgemein analytischer Natur; sie trifft die Differenzial- und Integral-Rechnung, nicht den Variations-Calcul, der nur eine Anwendung dieser Disciplinen ist. So wird z. B. die Theorie der Gleichungen in der Algebra behandelt, nicht aber in der Curvenlehre, obgleich sie in dieser eine sehr wichtige Anwendung findet.

Endlich weiss man, dass die Hauptgleichung der Variation $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - .. = 0$ schon bekannt war, ehe Lagrange die Gesammt-Gleichung herstellte, die wir in unserer Ableitung als folgende kennen:

$$\frac{Vdx}{\frac{1}{F}+p} = \frac{1}{p}\int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..\right) dx\, dy \;\ldots\; (1)$$

$$+ \left(\frac{C}{p} + P - \frac{dQ}{dx} + ..\right) dx \ldots. \quad (2)$$

$$+ \left(Q - \frac{dR}{dx} + ..\right)\frac{q\,dx}{p} \ldots. \quad (3)$$

$$+ \ldots\ldots \quad (4)$$

Nun giebt Gleichung (1), gleich Null gesetzt, die Variations-Gleichung. Allein die in (1) gefundenen Werthe machen Gleichung (2), Gleichung (3) etc. weder einzeln noch in Verbindung unter einander gleich Null. Da man nun beharrlich das Variations-Differenzial dz mit dem Transversal-Differenzial dz, welches allerdings gleich Null ist, verwechselte, und unbedingt das Variations-Differenzial Vdx unter der Form $\delta\int Vdx$ gleich Null haben wollte, so blieb kein anderes Mittel übrig, um alle Gleichungen (1), (2), (3) etc. wegzuschaffen, als sie einzeln gleich Null zu setzen, und dann aus jeder bestimmte Werthe abzuleiten, die diess leisten, und die man Grenzwerthe nennt, Werthe, die das Variiren einschränken, weil nur für sie der gegebene Ausdruck Vdx gleich Null wird.

Nun ist aber Vdx in der That nicht gleich Null, sondern gleich (II): $\left(\frac{1}{F}+p\right) dx\left(\frac{C}{p} + P - \frac{dQ}{dx} + .. + (Q - ..)\frac{q}{p} + ..\right)$, wie Euler selbst in den §§ 47, 49 angeführten Beispielen setzt, so dass man irre wird, und den Grund vermuthen kann, warum spätere Autoren eine Gleichung, die Euler in seinem Hauptwerke (*Methodus inveniendi etc.*) unbedenklich und mit Nutzen und Erfolg anwendet, ausser Acht lassen. Diese Formel, richtig aufgefasst, widerspricht der Theorie der Grenzwerthe.

Man könnte daher versucht sein, zu schliessen, dass diese Grenzwerthe zu dem besonderen Zwecke ausgedacht worden sind,

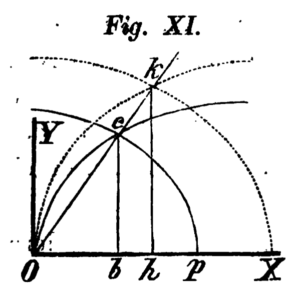
Gleichungen wegfallen zu machen, die einerseits unbequem sind, und andererseits nicht anders verwerthet werden können; und diese Gleichungen musste man wegbringen, weil sonst Vdx nicht gleich Null wird, und dieser Ausdruck sollte gleich Null sein, weil man das Variations-Differenzial mit dem Transversal-Differenzial verwechselte, so dass eine Verwechslung, ein Irrthum, der Grund der ganzen Theorie der Variations-Grenzwerthe sein könnte.

So zu schliessen wäre ungerechtfertigt, dieser Gegenstand hat einen tiefer liegenden Grund, der nun zu erforschen ist. Vielleicht gelingt es uns dabei auch, den Bernoulli'schen und Lagrange'schen Ideengang in genuiner Construction kennen zu lernen. — Wir schlagen einen Weg ein, der Anfangs ein Umweg zu sein scheint, der aber sehr bald und sehr rasch zum Ziele führt.

§ 53.

Es unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, dass in Variations-Problemen des II. Abschnittes, in denen die Flächen-Gleichung gegeben ist, alle Curven, die mit der Variations-Curve den Punkt x, y gemeinschaftlich haben, auch den gleichen Werth z gemeinschaftlich besitzen, da $z = f(x, y)$ gegeben ist. Ist z. B. in *Fig. XI.* die Linie Ock Variations-Curve, so haben die Parabeln pc, Oc den Punkt c mit der Variations-Curve gemeinschaftlich, und die Ordinate z im Punkte c ist für alle Curven, wie sie auch immer durch c gezogen sein mögen, eine und dieselbe Ordinate.

Fig. XI.



Wie stünde es nun, wenn diess auch für die Probleme des III. Abschnittes einträte? Dann wäre $z = \int Vdx$ statt Maximum oder Minimum für alle Curven, welche die Endpunkte mit der Variations-Curve gemeinschaftlich haben, eine und dieselbe Grösse, also für sie constant, so dass die Lösung des Problems gänzlich verfehlt wäre. Denn es ist bekannt, dass der Variations-Calcul bei Aufgaben des III. Abschnittes in Ermanglung der Kenntniss einer Transversal-Curve gerade den g e m e i n s c h a f t - l i c h e n Endpunkt der mit der Variations-Curve verglichenen

Curven betont, und auch in diesem Falle singulär im Rechte ist, da die Variations-Curve nicht bloss im Vergleich zu allen auf die Transversal-Curve gezogenen Linien, sondern auch im Vergleich zu allen Linien, die mit ihr denselben Punkt, den Werth (x, y) gemeinschaftlich haben, ein Maximum oder Minimum sein soll. So giebt (§ 48, Zusatz, Fig. X.) die Cycloide nicht bloss gegen alle auf die Normale gezogenen Linien, sondern auch gegen die Linie, die den Punkt r der Normale mit der Variations-Curve gemeinschaftlich hat, ein Minimum der Fallzeit, nicht eine Gleichheit der Fallzeit, was eintreten würde, wenn die Ordinate z, die in r beiden Curven gemeinschaftlich ist, auch für beide Curven denselben Werth hätte, wie diess in den Problemen des II. Abschnittes der Fall ist!

§ 54.

Diese Schwierigkeit ist nun zu heben. — In den Problemen des III. Abschnittes ist die Flächen-Gleichung nicht gegeben, sondern Resultat einer Integration, und werden in $z = \int V dx$ andere Curven, d. h. andere Gleichungen zwischen x und y substituirt, so erfolgen nothwendig andere Werthe von z, d. h. es erfolgen überhaupt andere Flächen, die über einander liegen, so dass dem nämlichen Punkte (x, y) in der Ebene XY verschiedene z als Ordinaten verschiedener Flächen entsprechen.

Werden algebraisch verschiedene Gleichungen in $\int V dx$ substituirt, so kann diess eine gänzliche Formveränderung der Functionen, nicht ein blosser Uebergang zu vorhergehenden und nachfolgenden Punkten einer und derselben Function sein. Eine gänzliche Formveränderung der Functionen, von der man freilich nicht weiss, wie sie allgemein hergestellt werden soll, wird in den Theorieen des Variations-Calculs als der entscheidenste Punkt vorausgestellt, kann jedoch in keiner Weise bewiesen werden, weil sie bei den Variations-Operationen in der That nicht stattfindet. Denn in den allgemeinen Operationen hat man nur die Substitution von $x \pm dx$ statt x, von $y \pm dy$ statt y etc., und diess ist nicht unbedingt eine Formveränderung der Functionen, sondern kann sogar selbst bloss ein Uebergang zu anderen Werthen einer und derselben Function sein.

Jedoch empirisch kann man die Formveränderung sehr wohl herstellen, und Euler hat durch sein Verfahren, durch welches er Maximum und Minimum unterscheidet (§ 41), durch Substitutionen beliebiger Curven wahre Formveränderungen von Functionen vorgenommen. Er gebraucht diess aber nur aushilfsweise bei der Entscheidung über Maximum und Minimum, die von dem Zeichen des zweiten Differenzials abhängig ist, er gebraucht dagegen diese Substitution nicht beim ersten Differenzial, nicht bei der Ableitung der Hauptfunction, denn dabei hätte sie keinerlei Dienste leisten können.

Nehmen wir z. B. das Problem § 48, das von der kleinsten Fallzeit handelt. — Wird in den Ausdruck: $\int \frac{\sqrt{(1+p^2)}\, dx}{\sqrt{2gx}}$ die Gleichung der Cycloide substituirt, so erfolgt für einen bestimmten Werth, z. B. $x = 2a$, die Grösse der Fallzeit gleich $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. — Wird in denselben Ausdruck die Gleichung einer anderen Curve, z. B. einer geraden Linie, substituirt, so ist für $x = 2a$, die Gleichung der geraden Linie, die Anfangspunkt und Grenzpunkt ($x = 2a$) mit der Cycloide gemeinschaftlich hat, gleich: $y = \frac{\pi x}{2}$, demnach $z = \int \frac{\sqrt{(1+p^2)}\, dx}{\sqrt{2gx}} = \int \frac{\sqrt{(4+\pi^2)}\, dx}{2\sqrt{2gx}}$ $= \frac{\sqrt{x}\sqrt{(4+\pi^2)}}{\sqrt{2g}}$ (und $x = 2a$ gesetzt) $= \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)}$.
Dieser Werth mit dem Werthe der Cycloide: $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ verglichen, zeigt, dass die Cycloide eine kleinere Fallzeit giebt.

Die beiden Fallzeiten, die beiden gefundenen Werthe z, entsprechen demselben Punkte x, y, aber sie sind Ordinaten, nicht der nämlichen, sondern verschiedener Flächen.

Diess ist Euler's Verfahren; man kann es überall empirisch anwenden, aber ohne Regel und nach blosser Willkür, und darum sind auch die Resultate nur für willkürlich gewählte Formen gültig; doch scheint diess Verfahren zutreffender zu sein, als das andere, das nur den Uebergang zu vorhergehenden und nachfolgenden Werthen einer und derselben Function macht, denn

dadurch werden nur Werthe von z verglichen, welche in der Ebene XY verschiedenen Punkten entsprechen, den Punkten (x, y), $(x \pm dx, y \pm dy)$; und geschieht bloss dieses, dann scheint die Natur der Aufgabe verfehlt zu werden — eine Abirrung vom Problem, welche diejenigen vertreten mögen, die keine Bedingungs-Gleichung und keine Transversal-Curve kennen, und nur Curven vergleichen, die denselben Punkt gemeinschaftlich haben sollen.

Sie vertreten auch ihr Verfahren, indem sie sagen, dass gerade für die Grenzwerthe die Punkte, um die es sich handelt, zusammentreffen. Wenn diess wirklich zutrifft, und nicht eine blosse Behauptung ist, dann ist es eine richtige Antwort, aber dann ist der Preis, um welchen man sich aus der Schlinge zieht, zu gross; es wird nämlich die Allgemeinheit des Variirens geopfert, und diess ist eine viel zu theuer erkaufte Rechtfertigung. Und zudem ist mit diesem Opfer noch nicht einmal erwiesen. dass die für diese Grenzwerthe gefundenen Grössen z nicht durchaus constant bleiben, was doch der Mittelpunkt der Frage ist, und um den es sich in Wahrheit allein handelt. — In der Wirkkeit steht es jedoch nicht so schlimm, denn das Ganze ist nur eine theoretische Beruhigung. Bei wirklichen Problemen nehmen alle Theorieen die Variation allgemein, z. B. Problem 45, in welchem Euler die Gleichung $y = nx$ statt der Variations-Curve setzt. Diese Substitution gilt für alle Werthe von x, für $x = \frac{1}{2}a$, a, $2a$, etc., es mag dafür das Lagrange'sche δy gleich Null werden oder nicht. Doch ist nicht zu verkennen, dass diese Schwierigkeit, welche die ganze Theorie zu erschüttern im Stande wäre, eben so gut unser Verfahren trifft, das keine Formveränderung, sondern vermöge der Differenzial-Operationen nur Uebergänge von (x, y) zu $(x \pm dx, y \pm dy)$ kennt, und nicht einmal Grenzwerthe in Anspruch nimmt, um nöthigenfalls dx oder dy verschwinden machen zu können.

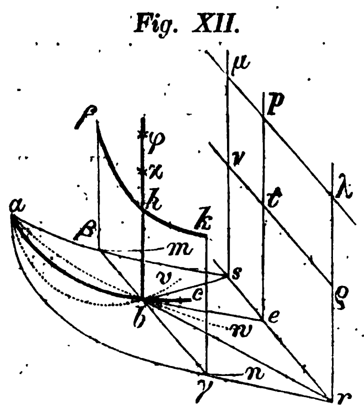
Dem wahren Ziele nun, etwa mit unendlich kleinen Grössen, dem gewöhnlichen, aber nicht zu rechtfertigenden Auskunftsmittel, näher kommen zu wollen, daran kann nicht gedacht werden, denn es handelt sich nicht um blosse Annäherung, sondern um wirkliches Zusammentreffen der Punkte x, y, und über-

diess auch um eine wirkliche Differenz der diesem nämlichen Punkte x, y entsprechenden Ordinaten z. Denn dass die gefundene Function z nicht constant, sondern wirklich ein Maximum oder Minimum ist, das ist das Wesen der Variation, und indem wir den einen Punkt, die Coïncidenz von (x, y) in's Auge fassen, dürfen wir den anderen, die Differenz von z, nicht übersehen.

§ 55.

Die mit der Variations-Curve abv (*Fig. XII.*) zu vergleichenden Nachbar-Curven $a\gamma n$, $a\beta m$ werden erzeugt, wenn in der Ebene XY statt der Ordinaten x, y die Ordinaten $x \pm dx$, $y \pm dy$ genommen werden. (Wählt man für denselben Werth dx die Zunahme dy so, dass sie der aus der Variations-Curve hervorgehenden Zunahme von y, also der Grösse Δy gleich ist, dann entfernt man sich gar nicht von der Variations-Curve, sondern bleibt gänzlich in ihr, und vergleicht nur ihre vorhergehenden und nachfolgenden Werthe von z unter sich.)

Fig. XII.



Nimmt man jedoch die willkürlichen Zunahmen dy verschieden von Δy, so werden Nachbar-Curven erzeugt. Ist z. B. die Bedingungs-Gleichung $x = c$, dann werden durch die Substitution von beliebigen $y \pm dy$ statt y, während x denselben Werth behält, Nachbar-Curven erzeugt. Giebt die Bedingungs-Gleichung etwa die Transversal-Linie $\beta\gamma$, dann werden die Curven $a\beta m$, $a\gamma n$ erzeugt, indem man die aus der Bedingungs-Gleichung hervorgehenden dx, dy in $x \pm dx$, $y \pm dy$ setzt, und diese Werthe in die Variations-Curve substituirt. Setzt man der Kürze halber ξ statt $x \pm dx$, η statt $y \pm dy$, so ist die Gleichung dieser Nachbar-Curven $z' = f(\xi, \eta)$, wenn die Gleichung der Variations-Curve $z = (x, y)$ ist. — Aber formverändernde, empirisch gewählte Curven abv, abw, die einen Punkt b mit der Variations-Curve gemeinschaftlich haben, werden dadurch nicht erzeugt.

Wie nun aber auch immer diese beliebigen, formveränderden Curven abv, abw gewählt werden mögen, so giebt es jederzeit entsprechende allgemein erzeugte Curven $a\gamma n$, $a\beta m$, deren Tangenten mit den Tangenten der empirischen, formverändernden Curven in der mit $\beta\gamma$ parallelen Linie ser zusammenfallen, so dass die ersten Differenzialien von z der fünf (oder unendlich vielen) verglichenen Curven, abc, abv, abw, $a\beta m$, $a\gamma n$, einander gleich sind (die Linien tp, $\nu\mu$, $\varrho\lambda$ ...).

Betrachten wir die beiden Curven abw und $a\gamma n$ (und dasselbe gilt von allen zusammengehörigen Curven), so haben sie im Punkte r die gleichen Werthe dz und auch die gleichen $d\zeta$, $d\xi$. Die der Curve $a\gamma n$ im Punkte γ entsprechende Ordinate z werde mit z', die der Curve abw entsprechende Ordinate z im Punkte b werde mit z'' bezeichnet. Geht man durch Integration von dz' zu z' zurück, so erhält man die Ordinate γk, wenn die Linie khf der Durchschnitt der Transversal-Curve mit der gegebenen Fläche ist.

Von diesem Werthe γk weiss man, dass er grösser oder kleiner ist als bh (die Ordinate z für die Variations-Curve). Dasselbe weiss man von βf, denn diese Werthe γk, βf unterscheiden sich von bh im zweiten Differenziale durch den Werth $\alpha . d f L dx, dy$, ein Werth, der für alle Differenzialien der Variations-Curve gleich Null ist, während er für die Bedingungs-Gleichung (Transversal-Curve) positiv oder negativ wird, je nachdem die Variation ein Minimum oder ein Maximum giebt.

Diese Werthe von z' sind analytisch: $z' = f(\xi, \eta) = (f(x \pm dx, y \pm dy)$ (wenn die aus der Bedingungs-Gleichung hervorgehenden Werthe dx, dy genommen werden).

Ferner weiss man aus dem Fundamentalsatz des Differenzial-Calculs, d. h. aus dem Taylor'scken Lehrsatze, dass

$$f(x \pm dx, y \pm dy) = f(x, y) \pm d(f(x, y) + \tfrac{1}{2} d^2 (f(x, y) + \dots$$

Geometrisch interpretirt sind aber $z' = f(x \pm dx, y \pm dy)$, $z' = \gamma k$, $z' = \beta f$ etc., Ordinaten z, die in der Ebene XY auf den Punkten $x \pm dx$, $y \pm dy$ senkrecht stehen, während $f(x, y)$ die Ordinate hb ausdrückt, die in der Ebene XY auf dem Punkte b senkrecht steht.

Was sind nun aber $d(f(x,y))$, $d^2(f(x,y))$ u. s. w.? Ebenfalls Linien, die in der Ebene XY auf den Punkten x, y senkrecht stehen und sich zu bh addiren, oder von bh subtrahiren, je nachdem die Zeichen der verschiedenen Differenzialien beschaffen sind, wobei noch erinnert wird, dass zwar das erste Differenzial $d(f(x,y))$ gleich Null ist, aber nicht die nachfolgenden Differenzialien.

Werden diese in demselben Punkte stehenden Linien zusammengenommen, so geben sie in obenstehender Figur die Linien $b\varkappa$, $b\varphi$ etc. etc.

Nun ist aber endlich auch z'' (das Resultat der Differenzirung in Bezug auf die Curve abw) ebenfalls gleich $f(\xi, \eta)$; es ist demnach auch für jede willkürliche, formverändernde und durch jeden beliebigen Punkt b der Variations-Curve gehende Linie abw, abv ... die entsprechende Ordinate gleich $b\varkappa$, $b\varphi$, also für rechts und links liegende Curven grösser, wenn die Variation ein Minimum giebt (und kleiner, wenn die Variation ein Maximum giebt), so dass durch Integration Werthe von z hervorgehen müssen, die für denselben Punkt (x, y) verschieden sind, also verschiedenen Flächen entsprechen, was auch die Substitution irgend einer beliebigen Curve empirisch giebt. (Analytisch ergeben sich ohnehin die gleichen Werthe von z' und z'', da diese Grössen durch Integration von $\left(\frac{1}{F} + p\right)\frac{\partial z}{\partial y} = V$ gefunden werden, und F, p, V für z' wie für z'' denselben Werth haben.)

Zugleich ist erwiesen, dass für diese empirisch gewählten Curven die nämliche Ableitung der Variations-Curve, und das nämliche Criterium der Unterscheidung des Maximums und Minimums gilt, wie sie für die allgemein ableitbaren Curven $a\gamma n$, $a\beta m$ gefunden worden sind.

§ 56.

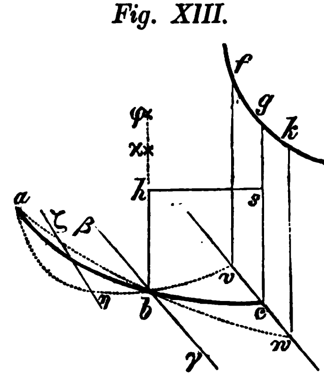
Nun können wir sogleich den Ideengang verfolgen, den Lagrange und Euler (in den späteren Schriften über Variation) genommen haben.

Für jede allgemein construirte Curve $a\gamma n$, sowie für jede durch irgend einen Punkt der Variations-Curve gehende empirisch

angenommene Curve *abw* muss der Ausdruck $\int L\,dx\,dy$ gleich Null sein. Nun ist (L) für die Variations-Curve allgemein und für beliebig gewählte Curven singulär gleich Null, und bleibt gleich Null in allen nachfolgenden Differenzialien, weil in ihnen die Werthe des ersten Differenzials substituirt werden. Für alle übrigen allgemein construirten Curven erhalten die zweiten und höheren Differenzialien von $\int L\,dx\,dy$ bestimmte Werthe und sind nicht gleich Null, weil in ihnen die Werthe der Bedingungs-Gleichung substituirt werden.

Denn jede empirisch gewählte Curve *(Fig. XIII.)* *abw*, *abv*, die mit der Variations-Curve *abc* einen beliebigen Punkt *b* gemeinschaftlich hat, hat die Eigenschaft, dass sämmtliche Ordinaten z der Variations-Fläche, die in der Transversale $\beta\gamma$ liegen, auch für sie wie für die Variations-Curve grösser oder kleiner sind, als die Ordinaten in *b*. Aber diess gilt nur für den gemeinschaftlichen Punkt *b*, nicht für andere Punkte, z. B. nicht für η, ζ. Denn in der Transversale $\eta\zeta$ hat nur der Durchschnittspunkt mit der Variations-Curve diese Eigenschaft, während für η und ζ die auf der Transversale vorwärts und rückwärts stehenden Ordinaten continuirlich zunehmen oder abnehmen. Ebenso in den Punkten *v* und *w*, da in der Transversal-Curve *fgk* nur *ge* ein Minimum ist, nicht aber auch *vf* oder *wk*.

Fig. XIII.



Weil aber für den Durchschnittspunkt jede beliebig gewählte empirische Curve die Eigenschaft der Variations-Curve hat, so gelten auch singulär für sie die Gleichungen der Variations-Curve $V dx = \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx$, und $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{F \partial z}{\partial x} = 0$, also auch die daraus abgeleitete Gleichung: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \ldots = 0$. (Für die Variations-Curve gilt diese Gleichung allgemein, für eine beliebig gewählte Curve aber nur für den Punkt, den sie mit

der Variations-Curve gemeinschaftlich hat. Eine solche Curve ist für diesen Punkt gleichsam wie die Variations-Curve, und keineswegs gleichsam wie eine Neben-Curve, z. B. $a\gamma n$ (der vorhergehenden Figur).

Z. B. Im Problem § 45, IV, vergleicht Euler die gerade Linie $y = nx$ mit der Veriations-Curve $ax = 3y^2$. Für den Punkt, den beide Curven gemeinschaftlich haben, wird $y = y$; also $ax = 3n^2x^2$; $n = \sqrt{\frac{a}{3x}}$. Für $x = a$ wird $n = \sqrt{\frac{1}{3}}$, für $x = 2a$ wird $n = \sqrt{\frac{1}{6}}$ etc.

Nun ist in diesem Probleme: $N - \frac{dP}{dx} + \ldots = ax - 3y^2$, für die Variations-Curve allgemein gleich Null, hingegen für $y = nx$ nur für den singulären Werth $n = \sqrt{\frac{a}{3x}}$. Ebenso sind alle nachfolgenden Differenzialien von $\left(N - \frac{dP}{dx} + \ldots\right)$ für die Variations-Curve allgemein, und für die gewählte Curve singulär gleich Null, so dass diese für ihre Nachbar-Curven in diesem Punkte ein Maximum oder Minimum ist, wie diess (§ 48, Zusatz) bei der Cycloide erläutert worden ist. Dort ist die Fallzeit einer geraden Linie, die einen Punkt r mit der Cycloide gemeinschaftlich hat, kleiner als die Fallzeit in den rechts und links von dieser Linie liegenden geraden Linien.

Hat die Variations-Curve diese Eigenschaft in allen Punkten, so hat eine gewählte Curve, z. B. die gerade Linie, sie nur in einem Punkte, hingegen können für jeden Punkt der Variations-Curve andere Curven gewählt werden, die wieder singulär für einen Punkt diese Eigenschaft haben.

Indem nun Lagrange und Euler die Einschränkung auf singuläre Werthe, welche für die gewählten Curven gültig und nothwendig ist, auf die Variations-Curve übertragen, für welche diese Einschränkung nicht nothwendig ist, müssen sie die Variations-Operationen als nur innerhalb bestimmter Integral-Grenzen gültig erklären, was nur auf einer Verwechslung der Variations-Curve mit den empirisch gewählten Curven beruht. Darum fallen für

die Variation diese Grenzen unbedingt weg und mit ihnen auch die specifischen Untersuchungen über die Variations-Grenzwerthe.

Der Ideengang Bernoulli's und Euler's (in seinen früheren Schriften, denn Bernoulli hat die Bahn gebrochen, die Euler noch in: *Methodus inveniendi curvas etc.* verfolgte) findet hinreichende Erläuterung in der vorausgehenden Figur. Bernoulli vergleicht nur Curven, die denselben Endpunkt b gemeinschaftlich haben. Die Vergleichung zweier Punkte b und r genügte nicht für die Variation, wie auch in der That noch der Punkt γ dazu genommen werden muss. Und überdiess muss mit der Transversale $\beta\gamma$ noch die Transversale $\eta\zeta$ verglichen werden. — Es bleibt bewunderungswürdig, wie Bernoulli von so schwachen Anhaltspunkten ausgehend, das richtige Variations-Resultat: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - .. = 0$ ableiten konnte.

§ 57.

Vergleichen wir die voranstehenden Resultate mit den Resultaten des II. Abschnittes, so kann uns nicht entgehen, dass die Variations-Probleme des III. Abschnittes vielfach anderer Art sind, als die Variations-Probleme des II. Abschnittes. Denn in diesen haben wir eine Flächen-Gleichung gegeben, und unendlich viele mögliche Variations-Curven; in den Problemen des III. Abschnittes hingegen haben wir eine Variations-Curve und unendlich viele verschiedene Flächen-Gleichungen, wenn die Bedingung festgehalten wird, dass die verglichenen Curven denselben Punkt (x, y) gemeinschaftlich haben sollen.

Die Probleme stimmen aber wieder überein, wenn in II. Flächen-Gleichung und Bedingungs-Gleichung mit einander gegeben sind, und wenn in III. die singuläre Bedingung weggelassen wird, dass die verglichenen Curven irgend einen beliebigen Endpunkt gemeinschaftlich haben sollen.

Dieser Unterschied und diese Uebereinstimmung kann uns nicht überraschen; vielmehr werden wir in Abschnitt IV. noch auf andere Differenzpunkte treffen, wo dann Alles, Uebereinstimmung und Verschiedenheit genügende Erklärung finden wird.

IV.

Variation der Ausdrücke von der Form: $z = f(x, y, p, q \cdot\cdot)$, *in denen nebst den Veränderlichen* x, y *auch ihre Differenzialien enthalten sind.*

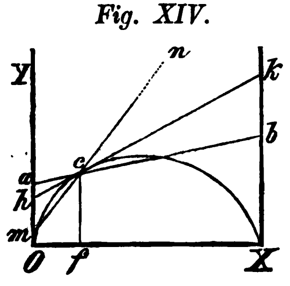
---

§ 58.

Wenn in der Entwicklungs-Geschichte der Probleme des vorhergehenden Abschnittes eine berühmte Curve, die Brachystochrone, den Anfang macht, so stehen an der Spitze der nun folgenden Probleme ebenfalls historisch berühmte Curven, die Ellipse und Hyperbel, weil in ihnen die zuerst in Angriff genommenen Probleme dieser Art ihre Lösung gefunden haben.

Es sei z. B. das Problem gegeben: Werden auf der Abscisse OX (*Fig. XIV.*) in zwei beliebigen Punkten O und X, zu welchen die Abscissen $x = 0$ und $x = a$ gehören, die Senkrechten OY und Xk errichtet, so wird die Curve gesucht, welche die Eigenschaft hat, dass die Tangente jedes beliebigen Punktes c Theile von OY und Xk abschneidet, deren Product $(Oa \times Xk)$ ein Maximum oder Minimum ist.

Fig. XIV.



Da $Oa = y - \frac{xdy}{dx}$, $Xk = y + (a - x)\frac{dy}{dx}$ ist, so wird $z = (y - xp)(y + (a - x)p)$, der analytische Ausdruck des gegebenen Problems.

Wird z total differenzirt, so wird

$$dz = -(2y + (a - 2x)p)\,pdx + (2y + (a - 2x)p)\,dy + \\ + ((a - 2x)\,y - 2\,(a - x)\,xp)\,dp.$$

Da $dy = pdx$ ist, so heben sich die beiden ersten Glieder dieses Differenzials identisch auf, und es bleibt noch $dz = ((a - 2x)\,y - 2\,(a - x)\,xp)\,dp$, was genau dasselbe ist, als ob man in z die Grössen x, y constant und bloss p veränderlich genommen und nach p allein differenzirt hätte.

Das Differenzial dz gleich Null gesetzt, giebt die beiden Gleichungen: $dp = 0$, und $(a - 2x)\,y - 2(a - x)\,xp = 0$, welche integrirt, die erste die Tangente $y = \alpha x + \beta$ (die Linie hk), die zweite $y^2 = Cx\,(a - x)$ die Ellipse OcX giebt, wenn C positiv ist (oder die entsprechende Hyperbel für einen negativen Werth von C). Die Gleichung $y^2 = Cx\,(a - x)$ drückt überdiess aus, dass die gegebenen Punkte O und X die Scheitel dieser Kegelschnitte sind.

Wird in irgend einem Punkte c die Lage der Tangente hk positiv oder negativ verändert, d. h. geht die Tangente in die Secanten mn, ab über, so ist das Product der durch die Secanten mn, ab.. abgeschnittenen Linien ($aO \times bX$) kleiner als das Product der durch die Tangenten abgeschnittenen Linien, so dass die Ellipse OcX der geometrische Ort aller Maxima von z ist.

Da ferner das totale Differenzial von z gleich Null ist, so muss z eine constante Grösse sein, was auch in der That der Fall ist, so dass die merkwürdige Eigenschaft der Ellipse (und Hyperbel) hervorgeht, dass die Producte der durch beliebige Tangenten in allen Punkten abgeschnittenen Linien hO und kX constant sind (was längst bekannt war), und dass überdiess diese Producte in Vergleich zu den von den entsprechenden Secanten abgeschnittenen Linien Maxima sind, eine von Lagrange zuerst bemerkte Eigenschaft dieser Kegelschnitte.

Von solchen Problemen aus hat die Lehre der oben bezeichneten Variations-Ausdrücke begonnen.

§ 59.

Der Anfang dieser Entwicklung war etwas eigenthümlich. Euler bestritt bekanntlich, dass Probleme der Art zu den Variationen gehören, und er war zugleich der Erste, der in einer 1756 erschienenen Abhandlung „über einige Paradoxieen des Integral-Calculs“ gerade diese Probleme ex professo behandelte, und von ihnen in anderer Hinsicht lehrte, dass sie jederzeit zweier Auflösungen fähig sind, einer durch Integration, die eine willkürliche Constante erfordert, und einer andern durch blosse Differenzirung der gegebenen Gleichung.

Und in der That, wenn z constant ist, so findet man die gesuchte Curve unmittelbar durch Integration von

$$Cdx = (ydx - xdy)(ydx + (a - x)\,dy).$$

Substituirt man aber zweitens in dieser Gleichung den aus $dz = 0 = ((a - 2x)\,y - 2\,(a - x)\,xp)$ abgeleiteten Werth p, so erhält man eine Gleichung des zweiten Grades zwischen x und y, die keine willkürliche Constante und auch keine Differenzialien mehr enthält, und deren algebraische Reduction die Ellipse oder Hyperbel giebt, je nachdem C positiv oder negativ ist.

Diess vornehmlich betrachtet Euler als ein Paradoxon, dass die Differenzirung die Stelle der Integration vertreten könne, was allerdings merkwürdig genug ist.

Später nahm Lagrange die Euler'schen Paradoxieen wieder auf, und behandelte sie mehrmals in seiner Theorie über die Functionen, sowie in seinen Vorlesungen über diese Theorie, wobei er fand, dass die Differenzirung dieser constanten Ausdrücke zugleich ein Maximum oder Minimum giebt, was wieder ein Paradoxon wäre, wenn es vom totalen Differenzial dz, und nicht von den bloss partiellen Differenzialien nach p oder nach q u. s. w. verstanden würde. Denn in Hinsicht solcher partieller Differenzirungen sind hier allerdings Maxima oder Minima vorhanden.

Lagrange behandelt diese Schwierigkeiten öfter, sowohl bei der Lehre der Berührung der Curven, als auch bei den Kennzeichen der Unterscheidung allgemeiner und singulärer Integrale, und schliesst in der Functionen-Theorie II, 60, unmittelbar vor Beginn der Variations-Rechnung die aufgestellten Resultate mit folgender Bemerkung:

„Allgemein, wenn man die Curve sucht, in welcher eine gegebene Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein Maximum oder Minimum sein soll, so kann man solches rücksichtlich aller der Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... suchen, welches eben so viele verschiedene Auflösungen giebt, und man erhält, allgemein gesprochen, für jede gesuchte Curve eine Gleichung von der nemlichen Ordnung, die die gegebene Function hat.

Wäre diese gegebene Function blos eine Function von den Elementen der Berührung a, b, c ...., so würde man, wenn man das Maximum oder Minimum nach den letzten Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... sucht, nothwendig die nemliche Gleichung finden, welche man erhielte, wenn man die gegebene Function einer Constante gleich setzte. Hiervon kann man sich leicht überzeugen. Denn setzt man die erste Ableitung von $f(a, b, c \ldots.)$, nach der höchsten der Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^3}$ .... genommen, gleich Null, so erhält man die nemliche Gleichung, welche man findet, wenn man, allgemein, die erste Ableitung der Gleichung

$$f(a, b, c \ldots.) = Const.$$

nach x, y, $\frac{dy}{dx}$ .... nimmt. Hieraus folgt, dass diese beiden Arten von Aufgaben, obgleich im Grunde sehr verschieden, dennoch einerlei Resultate haben, und folglich auf einerlei Weise aufgelöst werden können.“

Lagrange entscheidet nicht, ob man rücksichtlich einer der Grössen y, p, q .. differenziren, und die e i n z e l n e n Differenzialien gleich Null setzen soll, er sagt bloss, dass man es könne; er

sagt nicht, ob z bei Problemen dieser Art nothwendig constant ist, er sagt bloss, man finde die nämliche Gleichung, die man erhalten würde, wenn man z einer Constante gleich setzte; er sagt nicht, dass Probleme dieser Art gerade Variations-Probleme sind, aber er setzt sie im Uebergang zu ihnen, und in den späteren Vorlesungen über die Functionen-Theorie übergeht er ihr Verhältniss zur Variation mit Stillschweigen.

Da bei Aufgaben dieser Art weder Newton's und Leibnizens Herschergeist, noch Euler's und Lagrange's determinirender Verstand die festen Grundzüge gezeichnet haben, so sind die Methoden ihrer Behandlung, namentlich was die Herstellung des zweiten Differenzials zur Unterscheidung des Maximums vom Minimum betrifft, noch ziemlich im Ur-Zustande, und haben wie jeder Ur-Zustand Bequemes und Unbequemes durcheinander.

Deutsche Mathematiker, die den Schritt, bei dem Lagrange zögerte, entschlossen thaten, haben das Verdienst, wenn es ein Verdienst ist, die Aufgaben dieser Art für den Variations-Calcul gewonnen zu haben. Denn noch bleibt zu untersuchen, ob sie dabei wirkliche Variations-Probleme getroffen haben, oder nicht. Durch eine blosse Ueberschrift würden die Probleme das nicht werden, was sie nicht schon ihrer Natur nach sind, so wenig, als sie durch die Unterlassung einer Ueberschrift das verlieren könnten, was sie ihrer Natur nach sind, und ewig sein werden.

§ 60.

Ist allgemein $z = f(x, y, p, q \ldots)$ gegeben, so wird $dz = \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx$, und für die Bedingungs-Gleichung: $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{F \partial z}{\partial x}$, woraus $\frac{dz}{dx} = \left(\frac{1}{F} + p\right) \frac{\partial z}{\partial y}$, die allgemeine Variations-Gleichung abgeleitet wird.

Nun ist $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{dy} (Ndy + Pdp + Qdq + \ldots)$, und daraus:

$$dz = \left(\frac{1}{Fp} + 1\right) (Ndy + Pdp + Qdq + \ldots).$$

Weil das Integral von dz gegeben ist, $z = f(x, y, p, q\,..)$, so wird $z + c = \int \left(\frac{1}{Fp} + 1\right)(Ndy + Pdp + Qdq + ..)$, $z + c$
$= \left(\frac{1}{Fp} + 1\right) \int (Ndy + Pdp + ..) - \int \int (Ndy + Pdp + ..)\, d\left(\frac{1}{Fp} + 1\right)$.
Nun ist $\int (Ndy + Pdp + Qdq + .. = \int \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..\right) dy$
$+ p\left(P - \frac{dQ}{dx} + ..\right) + ..$ oder in den Zeichen des vorigen Abschnittes:

$$\int (Ndy + Pdp + Qdq + ..) = \int Ldy + pK.$$

Weil endlich $\int Ldy$ nothwendig gleich Null ist, so wird $z + c = \left(\frac{1}{Fp} + 1\right) pK - \int pK d\left(\frac{1}{Fp} + 1\right)$.

Zusatz. Wird $L = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..$ identisch Null, oder auch gleich einer Constante, so muss statt L je eine der zwei äquivalenten Formeln des § 38 substituirt werden. Indem nun der eine oder andere Fall in den vorliegenden Problemen öfter eintritt, und auch anderes scheinbar Paradoxes vorkommt, dass z. B. die Gleichung einer Tangente hervorgeht, während man die Gleichung der Curve selbst erwartet, so mögen diese Umstände Veranlassung zur Lehre gegeben haben, dass die Variations-Methode von Ausdrücken, die bloss Differenzialien $p, q\,..$ enthalten, ganz anders sein müsse, als die Methode bei Integral-Ausdrücken, was doch in keiner Weise stattfinden kann, weil die Methode eine allgemeine, also überall eine und dieselbe ist, wenn sie wirklich als Variations-Methode eintritt, d. h. wenn die vorliegenden Probleme gleich den Problemen II. und III. vollkommene Variations-Probleme sind.

§ 61.

Aus $z + c = \left(\frac{1}{Fp} + 1\right) pK - \int pKd\left(\frac{1}{Fp} + 1\right)$ folgt, dass der Ausdruck $\int pKd\left(\frac{1}{Fp} + 1\right)$ integrirbar sein muss, weil der andere Theil der Gleichung: $z + c$ wirklich integrirt ist. Jener Ausdruck muss daher gleich Null sein, und diess findet statt,

wenn entweder $pK = 0$, oder $d\left(\frac{1}{Fp} + 1\right) = 0$ ist. Ist $pK = 0$, dann wird $z + c = 0$, d. h. der gegebene Ausdruck ist nothwendig constant; ist $d\left(\frac{1}{Fp} + 1\right) = 0$, so wird $z + c = \left(\frac{1}{Fp} + 1\right) pK$.

Ist nun $d\left(\frac{1}{Fp} + 1\right) = 0$, so wird $\frac{1}{Fp} + 1 = c$, oder da $F = -\frac{dx}{d\eta}$ (für die Bedingungs-Gleichung) ist: $-\frac{d\eta}{dy} = c - 1$, woraus $\eta = (1 - c)\, y + b$ als Gleichung der Transversal-Curve hervorgeht. Da jede der aufeinanderfolgenden Transversal-Curven mit der Variations-Curve einen Punkt gemeinschaftlich hat, weil ja dieser gemeinsame Punkt das absolute Maximum oder Minimum der Transversal-Curve bestimmt, so folgt $c = 0$, d. h. es erfolgt für die Transversal-Curve dieselbe Gleichung wie für die Variations-Curve. Für Probleme dieser Art giebt es daher keine Transversal-Curven, sondern, wenn man sich so ausdrücken will, die Variations-Curve ist ihre eigene Transversal-Curve, die alle Punkte mit sich gemeinschaftlich, und überdiess die Bedingung des Maximums oder Minimums in sich selber hat, gerade wie die Ellipse, von der am Eingange dieses Abschnittes gehandelt wurde, welche die Bedingung des bei ihr eintretenden Maximums in dem Uebergange ihrer Tangenten in die Secanten hat, so dass es für sie keine weitere Bedingungs-Gleichung giebt, als $d\eta = dy$. Ist aber $c = 0$, und $d\eta = dy$, so wird $\frac{1}{Fp} + 1 = 0$, und es folgt wieder, dass z constant ist, so dass alle Ausdrücke dieser Art, wenn sie Eigenschaften eines Maximums oder Minimums haben sollen, nicht zufällig, sondern mit Nothwendigkeit constant sind, so zwar, dass wenn in Gleichungen dieser Art das Eine nicht stattfindet, auch das Andere nicht eintreten kann.

Da sich nun die Variation im Allgemeinen auf veränderliche z bezieht, so ist sehr die Frage, ob Ausdrücke von der Form: $z = f(x, y, p, q \ldots)$ zur Variations-Rechnung gehören, oder nicht.

§ 62.

Die Behandlungsweise dieser Probleme ist sehr einfach. Bei ihnen können die aus der Verbindung der beiden Gleichungen $dz = \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx$ und $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - F\frac{\partial z}{\partial x}$ hervorgehenden Formeln nicht in Anwendung kommen, da für constante z beide Gleichungen identisch werden, also auch aus ihrer Combination nichts weiter geschlossen werden kann.

Weil nun aber z constant ist, so muss das g a n z e Differenzial, nach jeder der Veränderlichen genommen werden, so dass $dz = Mdx + Ndy + Pdp + .. = 0$ hervorgeht. Heben sich mehrere dieser Glieder gegenseitig auf, so zeigen die übrigbleibenden an, nach welcher Eigenschaft (Tangente, Normale, Krümmungshalbmesser etc.) der Ausdruck z ein Maximum oder Minimum giebt. Denn heben sich z. B. $Mdx + Ndy$ gegenseitig auf und bleibt z. B. $dz = Pdp = 0$, so erhält man genau dasselbe, als wenn man den Ausdruck z bloss nach p differenzirte, und x und y unverändert liesse. Und weil dieses Differenzial nothwendig gleich Null ist (indem z constant ist), so muss ein Maximum oder Minimum erfolgen.

Die Entscheidung, ob die gefundene Function ein Maximum oder Minimum giebt, erfolgt aus dem Zeichen des zweiten Differenzials. Natürlich darf aber hier bloss nach derjenigen Veränderlichen differenzirt werden, deren Differenzial dasjenige Glied in dz herausstellt, aus dem die Eigenschaft des Maximums und Minimums abgeleitet wird.

So ist z. B. im obigen Euler'schen Problem $dz = ((a - 2x)y - 2(a - x)xp\,dp) = 0$, und es wurde bloss nach p differenzirt. In demselben Sinne auf's Neue differenzirt ist $d^2z = -2(a-x)xdp^2$, ein Ausdruck, der für positive x, und weil $x < a$ ist, negativ bleibt, also unbedingt Maxima liefert.

Heben sich aber in dz einige oder mehrere der Glieder Mdx, Ndy, Pdp .. nicht auf, so wird eines derselben, oder mehrere, beliebig welche, gleich Null gesetzt, und aus ihnen eine Relation gesucht, welche die übrigen Glieder miteinander

zu Null macht. Das Glied, aus welchem diese Relation gesucht wird, ist für Maximum und Minimum entscheidend, auch muss im zweiten Differenzial wieder nach derjenigen Veränderlichen, aus der es selbst abgeleitet wurde, differenzirt werden. Sind es mehrere Glieder, aus denen diese Relation gesucht wird, so gilt für sie das Nämliche, wie für ein Glied.

Beispiel. Gegeben ist:

$$z = 2(x - pw)^2 + 2(y + w)^2 - 2\beta(x - pw) + \beta^2$$

(worin der Kürze halber w statt $\frac{1 + p^2}{q}$ gesetzt ist).

Es wird $Mdx = (4(x - pw) - 2\beta)\,dx$; $Ndy = 4(y + w)\,dy$, $Pdp = 2\left((\beta - 2(x - pw))\left(w + \frac{2p^2}{q}\right) + 4(y + w)\frac{p}{q}\right)dp$, $Qdq = -2\left((\beta - 2(x - pw))p + 2(y + w)\right)\left(\frac{1 + p^2}{q^2}\right)dq$. Setzt man beliebig eines dieser Glieder gleich Null, z. B. das einfachste, Ndy, d. h. wird nun bloss nach y differenzirt, so wird $y + w = 0$, oder $yq + 1 + p^2 = 0$.

Daraus ist eine Relation zu suchen, welche die Summe der übrigen Glieder $Mdx + Pdp + Qdq$ gleich Null macht.

Die Gleichung $yq + 1 + p^2 = 0$ integrirt giebt: $py + x + c = 0$.

Unter der Bedingung, dass die willkürliche Constante c gleich $-\frac{1}{2}\beta$ gesetzt wird, geht diese Gleichung wegen $y = -w$ in den Ausdruck über: $\beta - 2(x - pw) = 0$, welcher, da überdiess $(y + w) = 0$ ist, $Mdx + Pdp + Qdq$ zu Null macht.

Die Variations-Gleichung $py + x - \frac{1}{2}\beta = 0$ integrirt, giebt: $y^2 + (x - \frac{1}{2}\beta)^2 = r^2$, einen Kreis mit willkürlichem Radius, dessen Mittelpunkt durch die Coordinaten $y = 0$ und $(x - \frac{1}{2}\beta) = 0$ bezeichnet wird.

Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum eintritt, wird Ndy noch einmal differenzirt, und bloss y als veränderlich genommen; diess giebt $d(4(y + w)\,dy) = 4dy^2$, so dass die Variation Minima giebt.

Zusatz 1. Die gegebene Gleichung entspringt aus folgender Aufgabe [1]):

Man soll eine Curve von der Eigenschaft finden, dass, wenn man auf derselben einen Punkt M beliebig nimmt, den zugehörigen Krümmungs-Mittelpunkt O bestimmt, und denselben mit zwei gegebenen Punkten A und B durch gerade Linien verbindet, die Summe der Quadrate dieser Verbindungs-Linien $(AO)^2 + (BO)^2$ grösser oder kleiner wird, als für jede andere Curve.

Die gefundene Auflösung giebt einen Kreis, der seinen Mittelpunkt in der Mitte der geraden Linie AB hat, so dass die Summe der geforderten Quadrate gleich wird: $\frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta^2 = \frac{1}{2}\beta^2$, eine constante Grösse. Jede andere Curve, deren Mittelpunkt Ω nicht in O (in die Mitte der Linie AB) fällt, giebt Linien $A\Omega$, $B\Omega$, deren Quadrate eine grössere Summe geben, als $AO^2 + BO^2$, was schon geometrisch aus der Lehre des Dreiecks bekannt und auch ohne Zeichnung deutlich ist.

Zusatz 2. Unsere Auflösung, in welcher bloss y als veränderlich genommen wird, vergleicht Curven, welche die Ordinaten y, $y + dy$, $y - dy$ haben. Die verglichenen Curven müssen aber, wenn sie Kreise sind, verschiedene Mittelpunkte haben, weil Kreise, deren Peripherieen durch verschiedene Punkte (x, y), $(x + y + dy)$, $(x + y - dy)$ gehen, ihre Mittelpunkte nicht gemeinschaftlich haben können, worauf es ankommt, damit für die gefundene Variations-Curve ein Maximum oder Minimum eintrete. Dasselbe gilt allgemein von allen anderen verglichenen Curven.

Zusatz 3. Ganz ähnliche Resultate erhält man, wenn $Mdx = 0$, oder $Pdp = 0$, oder $Qdq = 0$ gesetzt werden; denn die Relation, welche die Summe der übrigbleibenden Glieder zu Null macht, bleibt dieselbe: $\beta - 2(x - pw) = 0$, wie sie aus $Ndy = 0$ gefunden wurde. Uebrigens werden Gleichungen, die aus solchen Relationen abgeleitet sind, jederzeit nur sehr beschränkte Resultate liefern könne.

---

[1]) Strauch II, Aufgabe 86; Stegmann p. 50.

§ 63.

Noch ist zu erörtern, ob Probleme dieser Art zu den Variations-Problemen gezählt werden können. Man wird schwerlich irren, wenn man diess thut. Zwar wenn man es mit den Begriffen sehr genau nimmt, so ist zwischen veränderlichen und constanten Ausdrücken ein sehr grosser Unterschied.

In den Variations-Problemen ist z veränderlich, und die Variations-Curve ist der geometrische Ort aller absoluten Maxima oder Minima der Transversal-Curven; in gegenwärtigen Problemen aber ist die genugthuende Curve der geometrische Ort aller absoluten Maxima und Minima, die für bestimmte Eigenschaften dieser Curve eintreten; die Grösse z selbst aber, d. h. der gegebene Ausdruck, ist constant. Dadurch sind Untersuchungen gegeben, die mit den Variationen parallel gehen, und nur den Ausgangspunkt verschieden haben, indem sie auf constante Ausdrücke statt auf veränderliche hezogen werden.

Ein reicher Calcul, wie der Differenzial-Calcul, hat natürlich vielerlei Anwendungen. Doch da die Vermehrung von Titeln und Benennungen gerade nicht zum Frommen einer Wissenschaft gereicht, so möchten die gegenwärtigen Probleme immerhin den Variations-Problemen beizugesellen sein, weil sie mit ihnen eine sehr wesentliche Beziehung gemeinschaftlich haben. Finden sich ja auch zwischen den Problemen II. und III. grosse Unterschiede, ohne dass die Probleme II. von den Variationen ausgeschieden und durch eigene Benennungen ausgezeichnet zu werden brauchten.

Die eminente Stellung, welche die Probleme des dritten Abschnittes haben, bleibt ihnen unverkürzt, und die alten Autoren hatten nicht Unrecht, wenn sie die Integral-Ausdrücke allein für wahre Variations-Probleme gelten liessen. In Bezug auf die Wichtigkeit ihrer Resultate bei Erforschung der Naturgesetze können die Probleme II. und IV. ohnehin keinen Vergleich mit den Problemen III. aushalten.

Die Probleme des III. Abschnittes sind der Mittelpunkt der Variationen; als Integralien umfassen sie die ganze Fülle der bei

solchen Aufgaben möglichen Combinationen: veränderliche z, Transversal-Curve und Grösstes und Kleinstes nicht bloss gegen die zur Transversale gezogenen Curven, sondern absolut gegen alle Curven, die irgend einen Punkt oder eine beliebig gegebene Eigenschaft mit ihnen gemein haben.

Die Probleme des II. und IV. Abschnittes hingegen enthalten nur Bruchstücke dieser Fülle der Variationen; die Probleme II. haben zwar veränderliche z und grösste und kleinste Werthe in Bezug auf die Transversal-Curven, nicht aber auch in Bezug auf Curven, die beliebige Punkte und Eigenschaften mit der Variations-Curve gemein haben; die Probleme IV. kennen weder veränderliche z noch Transversal-Curven, wohl aber grösste und kleinste Werthe in Bezug auf Eigenschaften, die mit der Variations-Curve selbst gegeben sind, woher es kommt, dass auch nur Curven in Vergleichung gezogen werden, die diese Eigenschaft mit ihr gemein haben. So gilt z. B. die im Probleme § 58 bewiesene Eigenschaft für alle Curven, die in irgend einem Punkte die gleiche Tangente mit der Ellipse haben, aber bei ihnen nur singulär für den tangirenden Punkt, während sie bei der Ellipse als Variations-Curve allgemein für alle Punkte gilt.

§ 64.

Die Euler'schen Paradoxieen lassen sich nun sehr gut erklären. Ausdrücke, in denen sich mehrere Glieder des ersten Differenzials identisch aufheben (und solche Ausdrücke untersuchte Euler), müssen für die übrigbleibenden Glieder dieselbe Integral-Gleichung geben, die sie selbst haben, sei es, dass die übrigbleibenden Glieder integrirt, oder dass aus ihnen und aus der gegebenen Gleichung z der Werth p, oder q, etc., eliminirt wird. Enthält z ausser x und y bloss p, wie es in den Euler'schen Problemen der Fall ist, so erhält man nach Eliminirung von p eine von Differenzialien freie Gleichung, so dass in diesem Falle die Differenzirung in Verbindung mit algebraischer Elimination die Integration vertreten kann.

Etwas anders verhält es sich, wenn sich einzelne Glieder in $dz = Mdx + Ndy + Pdp + \ldots$ nicht identisch heben, sondern

ein Glied, gleich Null gesetzt, die Gleichung giebt, welche auch die übrigen Glieder zu Null macht.

Daraus können nicht unbedingt dieselben Integral-Gleichungen, wie aus dem Gesammt-Ausdrucke z, hervorgehen, aber sie sind doch so beschaffen, dass sie dem gegebenen Ausdrucke vollkommen genügen, — Resultate, die wir nicht weiter verfolgen, da sie mehr den Integral-Calcul betreffen, und dem Zwecke der gegenwärtigen Abhandlung zu ferne liegen.

§ 65.

Endlich wird es wohl keiner Erklärung bedürfen, warum Ausdrücke von der Form $z = f(x, y, p\,..)$ erst nach den Ausdrücken von der Form $z = \int f(x, y, p\,..)\,dx$ behandelt worden sind. Es war nöthig, dass aus der Verbindung der beiden Gleichungen: $dz = \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial x}dx$, und $\frac{\partial z}{dy} - \frac{F\partial z}{\partial x} = 0$ die entscheidende Variations-Gleichung abgeleitet wurde, was bei Problemen von der Form $z = f(x, y, p, q\,..)$ nicht möglich ist, weil bei ihnen die nöthigen zwei Gleichungen in eine zusammenfallen, indem ihre Grundlage z, statt veränderlich zu sein, constant ist.

Und doch ist die Analyse der Variations-Hauptgleichung nothwendig, damit in bestimmtester Klarheit eingesehen wird, dass constante z und Maxima und Minima in den Problemen des vierten Abschnittes unzertrennlich verbunden sind. Diess ist auch der Grund, warum nicht nach der Variations-Hauptgleichung, sondern nach der für constante Grössen anwendbaren Methode verfahren werden muss, welche verlangt, dass nicht die Summe einzelner Glieder, sondern die Summe aller Glieder von dz gleich Null gesetzt werde.

V.

Schluss.

---

§ 66.

Mit den vorausgehenden Untersuchungen schliesst sich die gegenwärtige Abhandlung, da sie bei dem ihr vorgesetzten Ziele angelangt ist. Für die Grundlegung ist das Gegebene hinreichend; die Theorie selber aber wird allerdings das ganze grosse Gebiet zu umfassen haben. Denn noch sind die Functionen von mehr als zwei Veränderlichen, mit oder ohne Neben-Gleichungen, dann im Besonderen die theilweisen Maxima und Minima zu untersuchen, welche die sogenannten isoperimetrischen Probleme im strengsten Sinne des Wortes ausmachen.

Das Gegebene ist daher nur Fragment, aber doch der Anfang und die Grundlage des Ganzen, und wer mit dem Gegenstande vertraut ist, weiss, dass mit diesen Untersuchungen die Hauptsache entschieden ist. Finden sich noch Lücken, so sind sie wohl so lebhaft empfunden worden, als sie von Andern empfunden werden können; sie waren aber durch die festgesetzten Grenzen dieser Abhandlung geboten.

§ 67.

Ueberblicken wir die Resultate, so ist der Beweis geführt, dass die Variations-Operationen durchaus nichts Anderes als Differenzial-Operationen sind, und die im Eingange aufgestellte

Erklärung über Wesen und Inhalt der Variationen ist in vollständiger Durchführung erhärtet worden. Auch sind Bezeichnung und Erklärung der Variationen, die Lagrange mit δ bezeichnet, und die in Wahrheit Differenzialien sind, rectificirt worden. Ein solches Zeichen, z. B. δy, ist in Bezug auf die Flächen-Gleichung die willkürliche, von keiner andern Grösse abhängige, also constante Zunahme dy; und erst durch Hinzutritt der Bedingungs-Gleichung wird sie von x abhängig, weil durch die Bedingungs-Gleichung die Variations-Curve bestimmt wird, in der y als Function von x erscheint, so dass für ein beliebiges dx die Grösse dy das erste Glied der ganzen Zunahme von y; demnach bedingt, abhängig und veränderlich wird.

Dadurch erledigt sich auch ein bekanntes Auskunftsmittel, das man gewöhnlich als theoretische Beruhigung vorausschickt, übrigens im Calcul selbst nicht anwendet. Um nämlich begreiflich zu machen, wie Curven in einem Punkte zusammentreffen können, giebt man ihnen einen gleichen Factor, z. B. $(a-x)$, und setzt man nun $\delta y = \mu(a-x)$, so verschwindet δy für $x=a$, und die erzeugte Nebencurve wird mit der Hauptcurve zusammentreffen müssen. Abstract genommen ist diess ganz richtig und nimmt sich sehr gut aus; aber im gegebenen Falle ist δy nichts Anderes als das Differenzial dy, und die Factoren dieses Differenzials sind schon längst durch die Variations-Curve bestimmt, so dass man willkürliche Factoren $(a-x)$ weder einsetzen noch wegnehmen kann. Ueberdiess handelt es sich nicht darum, dass δy d. h. dy gleich Null werde, sondern dass die Gleichung: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$ eintrete.

§ 68.

Auch die Frage über die Grenzwerthe der Variationen hat ihre richtige Stellung erhalten. Allerdings können bei den Variationen singuläre Werthe eintreten, wenn z. B. z für die Variations-Curve selbst ein absolutes Maximum oder Minimum wird, oder wenn die Curve Wendepunkte u. dgl. hat. So ist z. B. der Meridian in Bezug auf die Parallelkreise der geometrische Ort aller

Maxima der auf dem Horizonte senkrecht stehenden Ordinaten, und unter diesen ist die durch den Zenith gehende Ordinate ein absolutes Maximum, ein singulärer Werth. Diess sind jedoch nicht mehr Variations-Probleme, sondern gewöhnliche Differenzial-Probleme, und sind durch die Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima erledigt, so dass sie im Variations-Calcul keine andere Stelle haben, als dass sie in gegebenen Problemen als Anwendungen des Differenzial-Calculs einfach herüber genommen werden.

§ 69.

Im Verlaufe dieser Untersuchungen sind wir öfter auf Integral-Ausdrücke gestossen, deren weitere Verfolgung den Calcul selbst fördern könnte. Wir haben es, als unserm Ziele fremd und ferneliegend, übergangen. Doch sind Variation und Integration auf's Innigste verbunden, ja man kann sagen, dass der Integral-Calcul vorzugsweise durch die ihm vom Variations-Calcul gelieferten Probleme gross und mündig geworden ist. Von entschiedenster Bedeutung ist die Hauptgleichung: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - .. = 0$, die zugleich Bedingungs-Gleichung der Integrabilität gegebener Differenzial-Gleichungen ist, in welchem Falle $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..$ identisch gleich Null wird. Der Beweis dieser Gleichung, ihre Verfolgung und Ausbeutung nach allen Seiten hin hat Niemanden mehr beschäftigt, als den grossen Analysten Euler, den es störte, einen so wichtigen Lehrsatz des Integral-Calculs auf die schwankenden Variationen seiner Zeit gründen zu müssen. Und allerdings scheint eine solche Ordnung der Beweise höchst sonderbar. Integral-Calcul ist Theorie. Variations-Calcul ist Anwendung und sollte sich also auf die Theorie stützen, während umgekehrt der theoretische Lehrsatz nur in der Anwendung der Variation bewiesen werden konnte; diess war für Euler ein fort und fort störendes Moment. Seine häufigen Erklärungen darüber sind unzweideutig.

So schreibt er (Institut. calc. integr. III, Appendix Cap. III, 96 Scholion 1): „*Demonstratio hujus theorematis omnino est singularis, cum ex doctrina variationum sit petita, quae tamen ab hoc argumento*

prorsus est aliena; vix vero alia via patet, ad ejus demonstrationem pertingendi.“ Etwas später, § 104, setzt er hinzu „*theoremata haec* (diess sind zum Theile die aequivalenten Gleichungen § 38 unserer Abhandlung) *eo pulchriora videntur, quod eorum demonstratio ejusmodi principio innititur, cujus ratio hinc prorsus est aliena; propterea quod in his veritatibus nullum amplius vestigium variationum apparet; ex quo nullum est dubium, quin demonstratio etiam ex alio fonte magis naturali hauriri queat.*“

Diese natürliche Quelle, nach der Euler suchte, ist in den vorausgehenden Untersuchungen aufgedeckt worden, es ist das aus totaler und partieller Differenzirung hervorgehende zweite Differenzial: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y$. Den drei Gliedern dieses Ausdruckes entsprechen die drei äquivalenten Gleichungen § 38.

Wird ein solcher Ausdruck: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y$ durch partielle Integration auf $A dx dy$ oder $B dy^2$ oder $C d^2 y$ gebracht, z. B. auf $A dx dy$ (§ 36), so folgt durch totale Integration: $\int A dx dy = \frac{\partial z}{\partial y} dy = \int L dx dy + K dy$. Daraus folgt aus dem Wesen der Integration, wie § 36 bewiesen wurde, dass $L = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - ..$ gleich Null sein müsse, und zwar identisch gleich Null, wenn die gegebene Differenzial-Gleichung für sich integrabel sein soll, so dass nicht erst eine Function zwischen x und y in sie substituirt werden muss. Denn wäre jene Gleichung nicht identisch gleich Null, so würde aus ihr eine Function zwischen x und y gefunden, deren Substitution den gegebenen Ausdruck erst integrabel machte, der daher kein für sich integrabler Differential-Ausdruck sein könnte.

Dieses Haupt-Criterium der Integrabilität gegebener Differenzial-Gleichungen $dz = 0$ ist ganz und gar dem anderen, aber schwächeren, Criterium der Integrabilität $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ entsprechend, und wird auch aus derselben Quelle geschöpft und

bewiesen. Ist nämlich eine Differenzial-Gleichung von der Form: $\varphi dx + \psi dy = 0$ gegeben, so muss $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ werden, wenn die Gleichung für sich integrabel sein soll. Diess ist im Grunde nichts Anderes, als dass $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, d. h. dass es einerlei ist, ob man einen Ausdruck zuerst nach x und dann nach y, oder zuerst nach y und dann nach x differenzirt.

Also ist es die Eigenschaft eines Gliedes des zweiten partiellen Differenzials, das ein Criterium der Integrabilität liefert, während die Beschaffenheit dreier Glieder des nämlichen zweiten partiellen Differenzials das andere wichtigere Criterium der Integrabilität liefert. Aus der historischen Entwicklung des Integral-Calculs kann nicht entnommen werden, warum der Beweis dieses wichtigen zweiten Criteriums nicht aus der Quelle geschöpft wurde, die doch durch den Beweis des ersten Criteriums schon bekannt und benützt war.

Niemand hat sich, wie bemerkt worden, mit diesem Gegenstande so anhaltend beschäftigt, wie Euler, und es ist zu verwundern, dass dieser grosse Analyst den Beweis nicht fand, den er suchte, dem er nahe war, und dessen sämmtliche Elemente bereits vorlagen. Anders war es mit Leibniz und Newton in ihrem Verhältniss zum Differenzial-Calcul. Ihnen war ein nothwendiges Zwischenglied des Verständnisses, der Taylor'sche Lehrsatz, unbekannt, der erst einige Jahre später entdeckt wurde; wäre ihnen dieser bekannt gewesen, ihr herlicher Genius würde augenblicklich die wahre Theorie des Differenzial-Calculs ergriffen und festgehalten haben.

§ 70.

Mit dem Criterium der Integrabilität: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$ ist zugleich ein anderes wichtiges Moment gefunden. Es ist etwas, wenn man aus diesem Criterium weiss, dass eine Differenzial-Gleichung integrirt werden könne; es ist aber mehr, wenn man zugleich weiss, wie sie integrirt werden soll, und das Beste ist, wenn die Formel selbst das Verfahren der Integration vor-

schreibt. Diess geschieht aber in unserer Ableitung, dadurch dass die zweite Hauptformel mit der ersten verbunden wird. Weil $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..$ gleich Null ist, so bleibt noch: $\frac{\partial z}{\partial y} = K$, d. h. $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(P - \frac{dQ}{dx} + ..\right) + (Q - ..)\frac{q}{p} + ..$

Wird diese Gleichung integrirt, so folgt $z = 0$, während $\frac{\partial z}{\partial y}$ keineswegs gleich Null ist.

Die erste Hauptformel aber: $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - ..$, wenn sie nicht sogleich identisch Null wird, stellt den sogenannten integrirenden Factor heraus, durch dessen Multiplication die gegebene Gleichung integrirbar wird.

Diess sind wichtige Lehrsätze des Integral-Calculs, die hier nicht weiter verfolgt werden können; wir begnügen uns, sie aufgestellt und constatirt zu haben.

§ 71.

In der Einleitung ist darauf hingedeutet worden, dass die Variations-Rechnung das wahre Organ der Naturforschung sei. Sie ist es auch; aber sie muss als Organ vollkommen, und in ihrer eigenen Entwicklung reich genug sein, dass sie dem Reichthum und der Weite der Natur genügen kann. Im Fluge ist die Naturwahrheit nicht zu erhaschen, man muss dafür eine breite Grundlage der Forschung haben.

Wenn man nun bei wirklichen Problemen Alles untersucht und untersuchen kann, Variations- und Transversal-Curve, Projection und Fläche, alle einflussreichen Momente und die Combinationen, die sie unter sich haben mögen, dann ist Hoffnung vorhanden, dass es gelingt, in den stillen und verborgenen Haushalt der Natur zu dringen. Allem, was im Flusse des Seins feststehend ist, Allem, was Art, Function, Bestimmung und Entelechie der Dinge ist, muss ein Maximum der zu erzielenden Wirkung, und ein Minimum der verwendeten Kraft zu Grunde liegen und aufgeprägt sein, und diess Gepräge muss

